Horlogerie Théorique

par

Jul. Grossmann

et

Herm. Grossmann

Premier volume

Gauthier - Villars

Quai des Grands-Augustins 55

Paris



JULES GROSSMANN

(1829—1907)

HORLOGERIE THÉORIQUE

Cours de Mécanique appliquée à la Chronométrie

PAR

JULES GROSSMANN
Ancien directeur de l'Ecole d'Horlogerie du Locle,

en collaboration avec son fils

HERMANN GROSSMANN
Directeur de l'Ecole d'Horlogerie, d'Electrotechnique et de petite Mécanique
de Neuchâtel.

PREMIER VOLUME

*Ouvrage publié sous les auspices du Technicum du Locle,
approuvé par le Département de l'Instruction publique du canton de Neuchâtel
et par les Commissions des Ecoles suisses d'Horlogerie.*

BIENNE
E. MAGRON, ÉDITEUR

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, Quai des Grands-Augustins.

1911

Lausanne. — Imprimeries réunies, S. A.



ED. CASPARI

PARIS

PRÉFACE

de M. C. Ed. Caspari, ingénieur-hydrographe en chef.

Le temps a été choisi comme variable indépendante en mécanique, parce que, de toutes les grandeurs dont cette science s'occupe, c'est la seule qui se retrouve toujours et partout la même, celle aussi que l'observation donne le plus sûrement. Les astronomes, en effet, ont été conduits à considérer le mouvement de rotation de la terre autour de son axe comme parfaitement uniforme, au moins dans les limites que l'observation ne peut pas dépasser.

L'horlogerie se propose comme objet la représentation aussi fidèle que possible de ce mouvement, à une échelle convenablement choisie. Elle se présente ainsi comme une branche essentielle de l'astronomie elle-même, dont les éphémérides portent chez nous le titre de « *Connaissance des Temps* », en même temps que ses moyens d'exécution sont du domaine de la mécanique générale, à laquelle elle apporte en retour la réalisation matérielle de son unité fondamentale et de ses subdivisions. Aussi pouvons-nous dire, sans crainte d'exagérer l'importance de la chronométrie, qu'elle est à la fois la base et la pre-

mière application de la science mécanique, au double point de vue historique et rationnel. Les problèmes qui s'y rapportent, ont été le point de départ des plus importants travaux théoriques, et c'est seulement grâce aux instruments perfectionnés qu'elle en recevait, que l'astronomie a pu atteindre au plus haut degré de précision.

Il n'est aucun des domaines de la mécanique générale qui soit étranger à l'horlogerie. La question des résistances au mouvement, en particulier de celle des milieux fluides, dépend de l'hydrodynamique. La théorie du rouage est une application de la cinématique, si l'on ne considère que la forme et la disposition des roues ; elle fait appel à la dynamique, dès qu'on a égard aux frottements et aux chocs. Il en est de même de l'échappement. L'étude du régulateur : pendule ou balancier associé au spiral, n'est autre que celle des mouvements oscillatoires, plus ou moins troublés par des causes diverses, qui se trouve actuellement à la base de la physique mathématique. Et si jusqu'à présent on s'est contenté de la représentation du temps par des mouvements uniformément périodiques, il est à prévoir pourtant que tôt ou tard le mouvement continu, réglé par le pendule conique ou ses similaires, et déjà appliqué aux équatoriaux et aux appareils enregistreurs, réclamera sa place dans les réglages de précision.

L'horlogerie est en droit de revendiquer, comme étant de son domaine, tous les travaux des savants sur le pendule, qui procèdent de Galilée et d'Huyghens. Elle participe aussi, dans une large mesure, aux résultats des recherches sur la pesanteur, instituées à la suite de l'observation de Richer à Cayenne, et qui, de l'avis des juges compétents, sont un des moyens les plus sûrs dont dispose la géodésie pour étudier la forme de la terre.

Tout le réglage des montres, compensation et isochronisme, aussi bien que la théorie de leurs moteurs, se rattache en dernière analyse aux propriétés des lames élastiques. Les investigations des savants dans cet ordre d'idées sont d'ailleurs bien propres à faire ressortir le caractère pratique et expérimental qui est commun à tous les travaux regardant l'horlogerie. On a toujours pu se contenter de la théorie de la ligne neutre, dont les conséquences ont été vérifiées par l'expérience et qui est acceptée par tous les ingénieurs, sans recourir à la théorie mathématique de l'élasticité. Nous croyons devoir relever ce point, parce qu'on a pu penser parfois que ce principe manquait de rigueur : Phillips s'est même senti obligé de montrer que les résultats obtenus par la théorie de l'axe neutre étaient en accord avec la dite théorie mathématique, et Résal a démontré aussi que, dans le cas de flexions simples, les deux conduisent au même résultat. Mais, si l'on réfléchit que les lames élastiques de l'horlogerie sont loin d'être isotropes et que les déplacements moléculaires ne sont pas infiniment petits, on reconnaîtra que la préoccupation de la théorie mathématique n'est pas justifiée et qu'il est plus rationnel de s'appuyer sur celle de la résistance des matériaux, vérifiée expérimentalement.

Un court exposé historique fera apparaître avec évidence ces relations et influences mutuelles entre l'horlogerie et la science. Galilée, le premier, étudie les mouvements du pendule en vue d'en déduire les lois générales de la pesanteur et propose cet appareil pour la mesure du temps. Mais c'est surtout dans le « Horologium oscillatorium » (1673) qu'apparait avec toute sa portée la connexion entre la mécanique et l'horlogerie. Christian Huyghens y expose d'abord la théorie du centre d'oscil-

lation et du pendule composé, la découverte et la construction de l'horloge à pendule, de l'échappement; on y trouve ensuite des théories sur la force centrifuge, les propriétés géométriques et mécaniques de la cycloïde, c'est-à-dire le premier mouvement isochrone connu. Il y est encore question de la détermination de la pesanteur par l'observation du pendule, et d'une proposition relative à l'emploi du pendule à secondes comme étalon de longueur.

Si nous ajoutons l'application du spiral aux montres comme régulateur du balancier, on reconnaîtra sans hésiter que l'illustre savant hollandais a été le père de l'horlogerie de précision, en même temps qu'un des fondateurs de la mécanique moderne. Sous l'impulsion de ce puissant génie, l'art de la mesure du temps est absolument renouvelé, et le dix-huitième siècle n'aura qu'à développer les principes posés et à en perfectionner les applications.

Il semble qu'après un pareil début la science horlogère aurait dû exciter la curiosité des analystes et surtout des astronomes, au même titre que la mécanique céleste. Il n'en est rien pourtant et, si nous en exceptons quelques recherches des Bernoulli sur les tautochrones et brachistochrones, nous voyons le calcul des mouvements célestes solliciter des esprits tels que Clairaut, Euler, Lagrange, Laplace et tant d'autres, et conquérir sa place dans l'enseignement supérieur, tandis que la mécanique chronométrique semble reléguée au second plan. C'est que, pour développer les conséquences des lois de Newton, il suffit d'être expert au maniement des formules, sans être observateur, témoin Le Verrier. Il n'en va pas de même pour l'horlogerie; pour raisonner sur ses principes, il est nécessaire d'être quelque peu familiarisé avec sa tech-

nique. Peut-être aussi les problèmes qui se posaient alors avaient-ils un caractère principalement cinématique, comme toute la mécanique appliquée de cette époque, n'offrant pas l'appât des spéculations de hautes mathématiques. Le siècle de Watt et de Vaucanson ne peut certes passer pour une époque où les machines ne fussent pas en honneur; il se distingue au contraire par la recherche des combinaisons ingénieuses aussi bien que par le cachet artistique et le fini de ses productions, et il n'a pas été égalé sous ce rapport dans les temps qui l'ont suivi. Il serait d'ailleurs souverainement injuste de dénier la qualité de savants, et de savants éminents, aux Pierre Le Roy, aux Ferdinand Berthoud, qui, pour ne pas posséder à fond l'appareil mathématique, n'en raisonnaient pas moins en hommes de science. Leurs écrits, ceux de Sully qui les précède, et, en Angleterre, les travaux de Graham, Harrison, Arnold, pour ne citer que les plus marquants, ont fait faire à l'horlogerie des progrès rapides et décisifs, et le problème de l'isochronisme et de la compensation était bien près d'être résolu complètement dans ces horloges marines qui, dès la dernière moitié du siècle, donnaient les longitudes en mer.

Mais, quoi qu'il en soit, les astronomes de cette époque ne s'occupaient pas des détails de leurs montres; Cassini, Fleurieu, Borda ne visaient qu'à en déterminer les marches et les corrections par des observations astronomiques.

Les horlogers eux-mêmes délaissèrent peu à peu les recherches scientifiques et, après la mort de Ferdinand Berthoud, il s'écoula un temps assez long qui ne vit pas de travaux théoriques, bien qu'il fût signalé par des progrès expérimentaux dus à Jürgensen, Dent, Breguet, et d'autres encore. La cinématique avait dit son dernier mot; il

restait à introduire la mécanique basée sur la connaissance de l'effet des lames élastiques.

C'est ce que fit Bessel, qui publia en 1843 son remarquable mémoire dans lequel il examinait l'effet de la suspension à lames élastiques sur le mouvement du pendule. Il y appliquait la théorie de la résistance des matériaux, et ses résultats théoriques étaient vérifiés par les expériences de Laugier et Winnerl. Antérieurement déjà, le grand astronome de Kœnigsberg avait étudié de nombreuses perturbations du mouvement pendulaire, en se plaçant, il est vrai, plus spécialement au point de vue du pendule libre destiné aux mesures de la gravité; mais les résultats trouvés, concernant les effets du support, des modes de suspension, de la résistance de l'air, etc., pouvaient trouver leur application en horlogerie; on doit en dire autant des travaux antérieurs de Poisson et du mémoire postérieur de Stokes, consacré à l'étude spéciale du mouvement dans les milieux fluides plus ou moins visqueux.

En 1861, Edouard Phillips fit paraître son « Mémoire sur le spiral réglant des chronomètres et des montres ». Cette œuvre capitale marque une date décisive dans l'histoire de la chronométrie, d'une part par l'importance des résultats immédiats, d'autre part en inaugurant l'application de l'analyse mathématique au mouvement des chronomètres. Le premier, il montre que l'isochronisme peut être réalisé rigoureusement par la forme des courbes terminales, et il indique le moyen de construire ces courbes dans les conditions les plus variées de la pratique. Il avait plus spécialement en vue le spiral cylindrique des chronomètres, et traitait d'une façon plutôt accessoire le spiral plat des montres. Chose curieuse, c'est pourtant l'application aux montres de poche qui

devait donner les résultats les plus frappants et les plus décisifs, et l'honneur de cette application pratique revient principalement à Jules Grossmann.

Une fois sur la voie des recherches chronométriques, où il s'était engagé à l'occasion d'une question que lui posa le chronométrier Jacob à Dieppe, Phillips, en possession maintenant de la méthode générale, attaque successivement les problèmes qui lui sont posés par les praticiens : influence de l'anneau bimétallique du balancier (force centrifuge), réglage aux positions inclinées, spiraux coniques et de diverses formes, compensation des températures. Sa dernière œuvre fut l'étude d'une disposition de pendule actionné par un ressort.

Peu après l'apparition des premiers travaux de Phillips, Yvon Villarceau aborda de son côté la mécanique chronométrique. Son but principal était l'étude du balancier à lames bimétalliques ; mais, afin d'assurer le point de départ, il avait commencé par traiter à fond les influences du frottement, de la résistance du milieu, supposée proportionnelle au carré de la vitesse, et du choc de l'échappement. Il concluait en proposant une formule de marche développée suivant la série de Taylor, généralisant ainsi une théorie expérimentale de Lieussou.

Les travaux de H. Résal s'étendent à toutes les parties de la chronométrie. Ils se rapportent principalement aux engrenages en tenant compte des frottements et des chocs, à l'échappement, à la suspension élastique du pendule ordinaire et du pendule conique, aux chocs dans toutes les parties de la montre, enfin au ressort moteur et à la fusée. La variété des questions traitées et l'originalité des solutions indiquées font de ses travaux une mine précieuse d'informations pour ceux qui veulent aborder des problèmes analogues.

On voudra bien nous excuser si nous rappelons ici qu'à la suite de ces maitres et en nous inspirant des méthodes qu'ils avaient créées, nous avons donné la théorie du balancier à lames planes imaginé par Winnerl, étudié l'effet de la masse du spiral, négligée par Phillips, étendu à une forme très générale de résistance de l'air les résultats d'Yvon Villarceau, et enfin levé une contradiction apparente entre les théorèmes de Phillips et la règle de Pierre Leroy, en établissant une théorie du spiral cylindrique sans courbes terminales qui confirmait et précisait les résultats d'expérience des Berthoud.

Les travaux qui viennent d'être résumés, aboutissaient tous au réglage, c'est-à-dire à la partie la plus délicate de l'art de l'horloger : ce fut le régleur Jules Grossmann qui sut en tirer les conclusions pratiques, en les complétant et parfois les rectifiant d'après ses propres calculs, et qui eut le grand mérite d'introduire la théorie dans l'enseignement de la chronométrie. Nous ne pouvons songer à donner ici un aperçu complet de ses travaux. Ils forment d'ailleurs le fond de cet ouvrage, dont la lecture nous dispensera d'insister. Rappelons seulement que l'expérience lui ayant fait voir que les théories usuelles relatives au spiral et au réglage du plat au pendu étaient erronées, la lecture du mémoire de Phillips lui ouvrit des horizons nouveaux. S'étant assuré de la vérité des propositions qui y étaient contenues, il voulut acquérir sans tarder les connaissances mathématiques nécessaires pour la lecture et l'intelligence de ces travaux, en vue d'en tirer des conséquences nouvelles et fructueuses. Le succès récompensa cet effort, et Jules Grossmann eut l'honneur d'établir sur des bases nouvelles la théorie et la pratique du réglage. Reconnaissant d'abord la nécessité de connaitre l'heure avec la dernière précision, il se met à l'étude de

l'astronomie et se construit lui-même une pendule qu'il régle par des observations méridiennes. Il s'occupe ensuite de perfectionner les courbes du spiral plat, étudie les causes des différences de marches entre les positions horizontale et verticale, puis entre les quatre positions verticales ; il découvre ainsi la théorie dite « du point d'attache ». Pour appliquer cette théorie, il est amené à reprendre celle de la courbe intérieure du spiral et à compléter par là les recherches de Phillips. Celui-ci s'intéressa vivement aux travaux du savant régleur neuchâtelois, et dès lors s'établirent entre eux des relations cordiales auxquelles la mort de Phillips mit seule un terme.

La création d'une école d'horlogerie au Locle ayant été décidée, nul ne parut aussi digne que Grossmann de diriger cet établissement. Alors il dut laisser de côté pour un temps le réglage et reprendre la théorie générale de la montre. Laissons-le lui-même caractériser ses travaux.

« Je compris, dit-il dans son autobiographie, qu'il fallait entreprendre ces études en commençant par la force motrice, savoir, pour les pendules, par la force du poids et, pour les pièces portatives, par la force du ressort; vinrent ensuite les calculs du rouage et la théorie des engrenages, y compris la question importante des frottements des pivots, puis l'étude des divers échappements. Il est certain que, s'il existe des défauts dans l'une ou l'autre de ces parties, le réglage en souffre; pour ne pas risquer d'attribuer la cause de la marche irrégulière d'une montre à un organe plutôt qu'à un autre et de faire des retouches à de mauvaises places, en faisant ainsi plus de mal que de bien, il fallait établir une théorie nettement mécanique de tous les organes de la montre et de la pendule.

» Une fois ces études faites, je commençai à m'occu-

per de la partie réglante. Comme, pendant ce temps, mes connaissances en mathématiques avaient progressé, j'eus souvent le plaisir de trouver un bon accord entre la théorie et la pratique. »

En 1882-83, il publia en langue allemande les résultats de ses recherches sur le réglage. Une édition française de ce travail fut donnée par Lossier, en laissant de côté les calculs difficiles ou compliqués ; elle a puissamment contribué à la vulgarisation des vrais principes du réglage.

Enfin, l'ouvrage qu'on va lire, dû à la collaboration de Jules Grossmann avec son fils, est offert aux horlogers « pour leur éviter l'obligation de recommencer les mêmes études, et pour leur permettre d'étendre leurs travaux sur quantité de choses encore inconnues maintenant. »

Nous arrêtons ici cet exposé. Nous avons voulu faire une préface et non une histoire complète et détaillée de la science chronométrique. Les applications de la mécanique rationnelle à l'horlogerie vont maintenant se multipliant ; nous ne pouvons songer à les énumérer ; tout au plus pourrons-nous citer les noms de A. Cornu, Ch.-Ed. Guillaume, Rozé, Andrade, Brillouin, Riefler, qui ont produit d'intéressantes études théoriques. A plus forte raison, nous occupant spécialement de la théorie de la construction, avons-nous dû laisser de côté tout ce qui a été fait par les astronomes et les marins pour établir les formules de marche et de correction des horloges.

Il n'est peut-être pas hors de propos, en terminant, de répondre à l'avance à une objection que nous prévoyons et que nous connaissons de longue date pour être l'expression de la routine et de la paresse intellectuelle. A quoi bon des connaissances approfondies en mécanique, voire en mathématiques supérieures, pour faire avancer un art

tributaire surtout de l'habileté manuelle ? L'horlogerie n'a-t-elle pas fait de grands progrès sans enseignement supérieur et ne suffit-il pas que les praticiens connaissent les résultats découverts par les savants, sans se préoccuper de savoir comment ils ont été trouvés ?

Il est bien vrai que c'est seulement dans ces dernières années que la mécanique chronométrique a conquis le droit de bourgeoisie dans cet enseignement. Mais, si l'on regarde aux résultats déjà obtenus par la féconde collaboration des savants et des artistes, on aperçoit de suite quel essor nouveau l'horlogerie prendrait si tous les praticiens recevaient des leçons théoriques aussi complètes que possible, les rendant capables de comprendre les règles qu'ils appliquent de confiance, et au besoin de les modifier pour les adapter à des conditions nouvelles. Du reste, quand on parle de mécanique rationnelle, on a bien tort de prononcer le mot de *théorie pure*. Cette science n'est pas une simple branche des mathématiques : ses principes sont en réalité des résultats de l'expérience ou, si l'on veut, des inductions vérifiées par l'observation.

En ce qui regarde plus particulièrement notre objet, tous les savants qui ont abordé les problèmes chronométriques, n'ont considéré les mathématiques que comme un outil perfectionné, et ils ont tenu à contrôler d'abord par l'expérience les déductions qu'elles leur fournissaient. Il ne s'agit donc pas là d'une science perdue dans les abstractions, mais d'une science d'application, procédant par les méthodes d'approximation familières aux ingénieurs et ne perdant jamais le contact avec la réalité pratique. L'horlogerie a droit à une place dans l'enseignement supérieur, au même titre au moins que les autres branches de la science de l'ingénieur, et l'exemple de Jules Grossmann est là pour montrer tous les fruits que peut

produire la réunion, chez le même homme, d'une forte culture scientifique et de la connaissance approfondie de tous les secrets de la main-d'œuvre. La mort a mis un terme à l'infatigable activité du chercheur, mais son œuvre reste; elle revit dans cette publication, due à la piété filiale de son plus cher et plus autorisé élève et collaborateur. Nous avons l'assurance que le but qu'il visait sera atteint et que ce livre contribuera puissamment à l'essor de l'art chronométrique.

AVANT-PROPOS

La commission du Technicum du Locle a bien voulu prêter son appui à la publication de l'œuvre théorique de *Jules Grossmann*, le modeste et persévérant pionnier de l'analyse mécanique en horlogerie. Unanimes, les commissions des autres écoles suisses d'horlogerie ont aussi donné leur approbation à ce travail, de même que le Département de l'Instruction publique de Neuchâtel.

M. *Ed. Caspari*, ingénieur-hydrographe en chef de la marine française, président du Congrès chronométrique de Paris en 1900 et auteur de savantes études analytiques en horlogerie, consentit également à honorer cet ouvrage d'une préface qui, venant d'une plume aussi autorisée, sera lue par chacun avec intérêt. D'autre part, afin de mettre la théorie de la compensation à la hauteur des progrès dus aux récents travaux de M. Ch. Ed. Guillaume, directeur-adjoint du Bureau international des Poids et Mesures à Sèvres, nous avons prié cet analyste distingué de résumer, en un chapitre spécial, les applications de l'acier-nickel au balancier et au spiral.

Fort de ces précieux concours, nous ne pouvions hésiter à offrir aux horlogers qui cherchent à s'instruire, aussi bien qu'au personnel enseignant et aux élèves de nos écoles techniques, une œuvre qui leur serve de base d'études, en leur fournissant à cet effet les matériaux essentiels.

Nous n'avons nul besoin d'insister, au début de ce travail, sur le fait qu'à l'heure actuelle les questions de construction en horlogerie forment une branche bien déterminée de la mécanique, au même titre que d'autres constructions non moins spéciales; plus que celles-ci

encore, elles ont à lutter contre la difficulté de l'adaptation rigoureuse des principes théoriques à l'exécution pratique, par suite de la finesse des organes de la machine et de l'exactitude imposée aux fonctions du mécanisme.

Comme il s'agissait d'élaborer un ouvrage destiné à l'enseignement professionnel, nous avons cherché à présenter nos leçons en évitant aussi bien les spéculations de la théorie pure que les trop longs développements descriptifs appartenant au domaine de la vulgarisation.

Si la résolution de quelques problèmes ne peut, à notre avis, se passer de l'aide des mathématiques supérieures à cause de la précision même du but à atteindre, précision à laquelle tendent tous nos instruments chronométriques, il faut remarquer cependant que ces questions peuvent être laissées de côté par les personnes auxquelles les subtilités de l'analyse mathématique sont peu familières. Il sera suffisant, dans ce dernier cas, de reconnaître que les calculs ont été effectués, d'en constater les déductions et de faire usage des applications qu'on en peut tirer.

Nous estimons qu'un tel ouvrage doit tout aussi bien servir à l'instruction des élèves qui resteront dans les sphères moyennes de l'industrie qu'à celle des jeunes gens qui, par leurs capacités intellectuelles et pratiques, parviendront aux postes supérieurs de la fabrication ou de l'enseignement professionnel et dont les connaissances techniques devront être équivalentes à celles de l'ingénieur. C'est la raison pour laquelle nous avons pensé devoir conserver dans ce cours des calculs dont l'opportunité est indiscutable, mais dont l'étude demande des connaissances plus spéciales en mathématiques.

Nous nous sommes efforcé, du reste, de graduer les difficultés de calcul, pour qu'elles ne surgissent qu'à mesure que les jeunes gens avancent dans leurs études de mathématiques, et nous faisons suivre chaque formule d'un exemple numérique avec les détails du calcul. Comme ces exercices ne sont évidemment pas destinés à être retenus par cœur, mais seulement à être vérifiés une fois par l'élève, il faut les défalquer du texte pour juger de ce que le jeune homme doit effectivement s'assimiler. Quelques paragraphes peuvent d'ailleurs être passés sans inconvénient, lors d'une première étude ; ils sont généralement imprimés en plus petits caractères. Les exercices ne sont pas inutiles à l'élève, s'il se donne la peine de les refaire consciencieusement ; outre qu'il apprendra ainsi l'art de calculer, il

arrivera à mieux comprendre et à mieux fixer en lui-même le sens des lois. Le professeur trouvera ensuite un nombre infini de problèmes à faire résoudre, analogues à ceux que nous donnons comme exemples et que l'élève traitera par ses propres moyens.

Dans le cours de nos calculs, nous nous sommes souvent servi des logarithmes à sept décimales, par raison d'exactitude ; il est évident qu'en prescrivant aux élèves des calculs semblables, le maître pourra juger suffisant, dans le plus grand nombre des cas, l'emploi des tables à cinq décimales.

Nous voulons faire de nos élèves des êtres intelligents et sachant raisonner : c'est pourquoi il importe de diversifier les exemples numériques le plus possible, en les appliquant à nombre de cas spéciaux. Il ne faut pas favoriser la paresse, déjà trop naturelle, des jeunes esprits, en réduisant le problème à une occupation purement mécanique, où le bon sens et l'observation n'ont plus aucune part. D'ailleurs, les données doivent être choisies de manière que des vérifications pratiques interviennent tant au point de vue de l'exactitude des calculs qu'au point de vue de l'ordre des grandeurs.

Remarquons encore que jusqu'à présent, en mécanique, l'emploi du système C. G. S. ne présente pas d'avantages réels et qu'actuellement encore les ingénieurs non-électriciens font leurs calculs selon le système du kilogramme. Tout en ne laissant pas l'élève dans l'ignorance du système C. G. S., nous pensons qu'il est inutile de modifier les unités pratiques comprises en fabrique et de les remplacer par des unités théoriques qu'il faudrait quand même transformer pour l'usage industriel.

Notre programme comporte d'abord une courte et très élémentaire introduction sur les principes de *cosmographie* qui ont rapport à la mesure du temps, et quelques notions fondamentales de *mécanique*. Les chapitres qui suivront, seront consacrés à l'étude des *forces motrices* produites par le poids et le ressort de barillet, aux calculs des *rouages* et à la théorie des *engrenages*. D'autres chapitres embrasseront les mécanismes de l'*échappement*. Enfin la théorie du *réglage* formera une partie importante de ce travail et sera traitée avec toute l'exactitude que nécessite le sujet. Nous terminerons cette théorie par une étude sur la *compensation des chronomètres*.

En terminant, qu'il nous soit permis de témoigner notre profonde reconnaissance à celui qui fut notre vénéré père et maître, enlevé malheureusement avant d'avoir pu assister à la publication

définitive de son œuvre. D'autres plumes, plus compétentes que la nôtre, ont retracé la carrière de ce travailleur infatigable, de ce chercheur modeste et consciencieux, qui nous a légué le devoir de mettre au jour l'œuvre de sa vie. Il a travaillé sans ambitionner d'autre récompense que celle de voir ses élèves bénéficier de ses travaux et dans l'unique but de contribuer aux progrès de la profession à laquelle il s'était absolument voué et qui est l'une des plus nobles entre toutes, puisqu'elle trouve sa base dans l'immuabilité des mouvements célestes.

Nous nous sommes efforcé de laisser à cette œuvre le caractère original que lui a imprimé son auteur ; l'expérience de l'enseignement à de jeunes élèves, souvent insuffisamment lestés de connaissances mathématiques, nous a appris à ne pas ménager certains détails de développements algébriques, lorsque la clarté du sujet pouvait y gagner. On nous a conseillé parfois de raccourcir certains calculs en employant d'autres méthodes, mais l'expérience a montré qu'il est parfois avantageux d'effectuer certains détours pour mieux atteindre le but, spécialement lorsqu'il s'agit d'enseigner à des jeunes gens dont les études théoriques ne peuvent comporter, à côté du travail pratique, qu'une minime partie du temps consacré à l'apprentissage.

Neuchâtel, octobre 1908.

HERMANN GROSSMANN.

INTRODUCTION

I. Eléments généraux de cosmographie ayant rapport à l'horlogerie.

1. **Principes de la mesure du temps.** — La cosmographie est une science qui a pour but l'étude des différents phénomènes célestes tels qu'ils nous sont donnés par l'observation et le calcul ; elle comprend aussi l'étude des principes qui sont la base de la mesure du temps.

Lorsqu'on se propose de mesurer une longueur, une surface, un volume ou un poids quelconques, on choisit arbitrairement une unité de longueur, de surface, de volume ou de poids, à laquelle on compare l'objet à mesurer, en se rendant exactement compte du nombre de fois que cette unité s'y trouve contenue.

Quand il s'agit de mesurer des intervalles de temps, il n'est plus possible de faire usage d'une méthode analogue. Aussi, pour effectuer cette opération, est-on obligé d'apprécier les espaces parcourus par un corps animé d'un mouvement uniforme (31) ou périodiquement uniforme (33). Du premier cas on conclut que les intervalles de temps sont proportionnels aux espaces parcourus par le corps considéré.

2. Il faut donc admettre que toutes les mesures de temps doivent se déduire de l'observation d'un mouvement régulier. Ainsi, autrefois, on déterminait une fraction plus ou moins

grande de temps par l'écoulement du sable dans le « sablier » ou de l'eau dans la « clepsydre ». Actuellement, dans les horloges et les montres, le temps est mesuré par le mouvement périodiquement uniforme du pendule et du balancier.

3. **Unité de temps. Jour sidéral. Jour solaire.** — Pour la détermination de l'unité de temps, il s'agissait de choisir le mouvement le plus uniforme possible, un mouvement tel que sa vitesse soit aujourd'hui la même que demain, que dans un an, que dans un temps indéfiniment prolongé.

Un tel mouvement, remplissant absolument cette condition, est celui de la rotation de la terre sur son axe ; en effet, aucune force ou cause quelconque ne peut la ralentir ou l'accélérer. On a des preuves certaines que ce mouvement est aujourd'hui le même qu'il était du temps d'Hipparque, ancien astronome de l'Ecole d'Alexandrie, qui vivait deux siècles avant Jésus-Christ. On peut s'assurer, par le calcul des éclipses, que la durée d'une de ces rotations est aujourd'hui la même que du temps de cet astronome, à $^1/_{200}$ de seconde près. Ce mouvement a donc été choisi, à cause de sa grande régularité, comme base de la mesure du temps.

La durée d'une rotation complète en est l'unité et se nomme un *jour*.

4. Pour pouvoir déterminer avec exactitude le commencement et la fin de ce mouvement, il est nécessaire de choisir un point de repère en dehors de la terre et, à cet effet, on se sert d'une étoile fixe ou du soleil. Remarquons que le résultat diffère suivant que l'on aura pris l'un ou l'autre de ces deux points. La démonstration suivante nous en expliquera la raison.

5. On sait que la terre ne tourne pas seulement autour de son axe, mais qu'elle possède un mouvement simultané autour du soleil. Soient donc T et T′ (fig. 1) les deux positions que la terre occupe sur son orbite au commencement et à la fin d'une de ses rotations diurnes. Dans la première de ces positions, *a* est un point de sa surface qui verra en cet instant le centre *s* du soleil dans un plan imaginaire comprenant

les deux pôles et le point considéré *a*. Ce plan est le *plan méridien*.

Au bout d'un certain temps, la terre s'est transportée sur son orbite jusqu'en T′ et le point *a* vient passer en *a*′ de telle façon que la ligne T′*a*′ soit parallèle à T*a*. La terre aura alors accompli une rotation sur son axe et toutes ses parties auront, par rapport aux étoiles fixes, les mêmes positions qu'elles avaient en T.

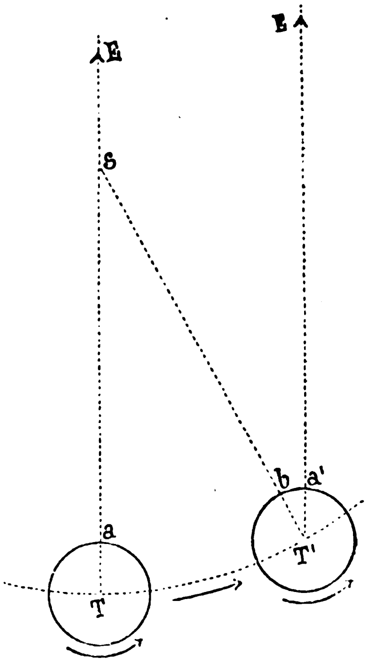


Fig. 1.

On appelle le temps pendant lequel s'est accompli cette rotation, un *jour sidéral*.

Mais, du point *a*′ dans la position T′, on ne verrait pas encore le soleil dans le plan méridien ; pour que l'observateur placé en *a*′ l'aperçoive de nouveau dans ce plan, il faut que le point *a*′ se déplace encore jusqu'en *b* en parcourant l'arc *a*′*b*.

Le jour solaire, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil au plan méridien, est donc plus long que le jour sidéral. En divisant le jour solaire en 24 heures, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes, le jour sidéral ne compte que 23 h. 56 m. 4 s.,09 ; le jour sidéral est donc plus court que le jour solaire de 3 m. 55 s.,91.

Si l'on divise par contre le jour sidéral en 24 heures, le jour solaire comptera 24 h. 3 m. 56 s.,55. Cette valeur du jour solaire variable en jour sidéral n'est qu'une moyenne.

6. Le temps que la terre emploie à parcourir son orbite, c'est-à-dire l'année, compte exactement un jour sidéral de plus que de jours solaires.

7. **Temps vrai. Temps moyen.** — La courbe que la terre

décrit autour du soleil est une ellipse dont cet astre occupe l'un des foyers. Notre planète ne parcourt pas cette courbe avec une vitesse uniforme; elle se meut plus rapidement lorsqu'elle est plus rapprochée du soleil et plus lentement lorsqu'elle s'en trouve plus éloignée. Les arcs parcourus par la terre en un jour ne sont donc pas de même longueur pendant toute l'année. Il en résulte une irrégularité dans la durée du jour solaire ; le jour solaire est plus long lorsque la terre va plus vite et il est plus court lorsque son mouvement de translation est plus lent.

Une autre cause qui augmente encore cette irrégularité provient du fait que l'axe de la terre n'est pas perpendiculaire au plan de l'orbite qu'elle parcourt autour du soleil (plan de l'*écliptique*).

La durée du jour solaire peut varier, en plus ou en moins des 24 heures, jusqu'à 30 secondes. Ainsi, le jour solaire avec ses variations quotidiennes de durée ne remplit pas du tout les conditions voulues pour la mesure du temps, l'unité adoptée devant être de valeur immuable, afin que nos instruments d'horlogerie, tous basés sur un mouvement uniforme, poursuivent leur marche régulière sans nécessiter de perpétuelles retouches. Nous tombons donc dans une difficulté, puisque forcément le soleil doit nous mesurer le temps et que, d'autre part, son mouvement inégal ne se prête pas à cette mesure. Voici comment a été tournée la difficulté : on divise la durée totale de l'année par le nombre de jours solaires qu'elle comprend ; le quotient sera une valeur moyenne plus courte que les jours solaires de plus grande valeur et plus longue que les jours solaires de durée moindre. Elle sera en outre à peu près égale à certains d'entre eux. Cette valeur moyenne se nomme le *temps moyen*. On appelle par contre *temps vrai* l'intervalle direct de temps s'écoulant entre deux passages successifs du soleil au méridien. L'avance ou le retard du temps vrai sur le temps moyen peut s'élever jusqu'à 17 minutes.

8. On appelle *équation du temps* la valeur qu'il faut ajouter

au jour solaire vrai ou en retrancher pour obtenir le jour solaire moyen. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* publie chaque année, dans un calendrier, le résultat de l'équation du temps et donne, dans une colonne intitulée « Temps moyen à midi vrai », l'heure que doit indiquer un chronomètre réglé sur le temps moyen au moment du midi vrai. L'équation du temps est nulle, ou à peu près, quatre fois par an : le 15 avril, le 15 juin, le 31 août et le 25 décembre, tandis qu'elle atteint sa plus grande valeur entre les 10 et 12 février et les premiers jours de novembre.

9. **Tracé d'une ligne méridienne.** — Nous avons déjà une idée de l'importance du plan méridien dans la détermination de la durée d'une rotation de la terre sur son axe.

Examinons maintenant comment on peut procéder pour établir la direction d'une *ligne méridienne*, c'est-à-dire de la trace du plan méridien sur la surface de la terre.

Parmi les diverses méthodes connues, choisissons la suivante, qui se recommande par son extrême simplicité et qui ne demande pas d'instruments de précision.

Sur un plan horizontal convenablement placé, on plante un style vertical ; de son pied O (fig. 2) on décrit sur ce plan divers cercles concentriques quelconques, tels que *m n*, *m' n'*, etc. Marquons sur ces circonférences les points A, B, C, etc., successivement effleurés par l'extrémité de l'ombre de la tige avant midi. Pendant l'après-midi, renouvelons l'opération en indiquant, de la même manière, les points A', B', C', etc. On relie les points marqués sur une même circonférence par une ligne droite ; on obtient ainsi autant

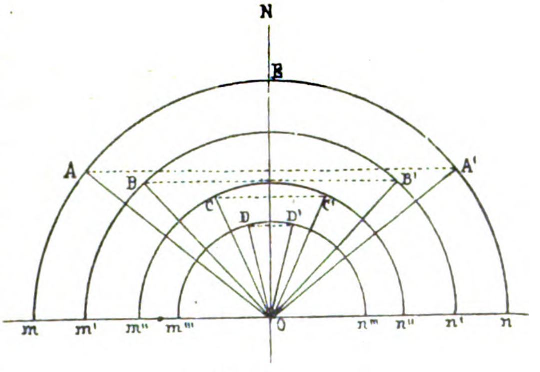


Fig. 2.

de droites que de cercles et elles sont parallèles entre elles. La perpendiculaire abaissée du centre O sur ces droites sera la ligne méridienne cherchée. Comme l'ombre projetée par un tel style n'est jamais très nette, on arrivera à une plus grande exactitude en terminant l'extrémité de la tige par une plaque métallique dans laquelle on perce un trou fin; on indique alors le centre de l'image solaire sur chacune des circonférences, comme précédemment. Dans la construction ci-dessus, un seul arc suffirait, mais il est préférable d'en employer plusieurs qui se contrôlent mutuellement, le milieu des droites AA′, BB′, CC′, etc., devant se trouver avec le centre O sur une même perpendiculaire O N.

10. Lorsque le milieu de la petite image du soleil se trouve sur la méridienne, elle est le plus rapprochée du pied du style et par conséquent le soleil est à sa plus grande hauteur; il est donc *midi vrai*. Pour obtenir l'heure moyenne, il faudra consulter une table d'équations et ajouter ou retrancher, suivant l'époque de l'année, la correction indiquée pour ce jour. Généralement, comme nous l'avons dit, ces tables indiquent le « temps moyen à midi vrai »; ainsi, pour le 18 novembre 1908, on trouve indiqué : Temps moyen à midi vrai, 11 h. 45 m. 14 s.

L'horloge ou la montre doit donc marquer 11 heures 45 minutes et 14 secondes quand le milieu de la petite image du soleil se projette sur la ligne méridienne.

11. La *lunette méridienne* employée dans les observatoires n'est pas autre chose qu'une ligne méridienne déterminée avec la plus grande exactitude. C'est une lunette, généralement d'assez grandes dimensions, qui ne peut se mouvoir que dans le plan méridien, lequel la partage en deux parties symétriques. Elle est supportée par deux piliers inébranlables au moyen de tourillons, lui permettant de prendre toutes les positions possibles autour de son axe de rotation. On peut donc s'en servir pour observer le passage au méridien de tous les astres visibles au-dessus de l'horizon. La sensibilité de l'instrument est surtout augmentée par le grossissement des verres employés.

Comme une telle lunette ne peut être transportée, on a recours à d'autres instruments pour déterminer l'heure en un endroit quelconque, sur mer par exemple. Celui dont l'usage est le plus général, est le *sextant*, mais son emploi est compliqué.

12. Si l'heure moyenne est connue et qu'il s'agisse seulement de la conserver, la marche apparente des étoiles fixes se prête aisément à ce but. En effet, comme ces astres reviennent à la même position au bout de 24 heures sidérales, il suffit de placer une mire quelconque, mais fixe et invariable, dans la direction d'une étoile ; le lendemain, à la même heure (temps solaire) moins 3 minutes 55 sec.,91, cette même étoile se présentera de nouveau devant cette mire. Ce sont les étoiles fixes qui offrent le plus de facilité pour le contrôle de la marche des montres et des pendules.

13. **Détermination de la position d'un point sur le globe terrestre.** — Comme les chronomètres de marine font partie des instruments dont on se sert pour déterminer la position d'un point quelconque sur la surface de la terre, notamment celle d'un vaisseau sur mer, chaque horloger devrait se rendre compte du rôle que ces instruments jouent dans ces observations, desquelles dépendent la sécurité du navire et celle des êtres qu'il transporte.

14. Pour représenter la position d'un point sur la surface d'une sphère telle que la terre, on suppose décrits, sur cette sphère, deux grands cercles, l'un passant par les deux pôles et que l'on nomme *cercle méridien*, l'autre perpendiculaire au premier : c'est l'*équateur*. Ce dernier est par conséquent perpendiculaire à l'axe terrestre et a tous ses points également éloignés des deux pôles. Chacun de ces cercles est divisé en 360 degrés. La division effectuée sur le cercle méridien commence à l'équateur et se compte au nord et au sud jusqu'aux pôles, donc de 0 à 90 degrés. Ces degrés sont appelés *degrés de latitude*.

Comme on peut imaginer un nombre infini de méridiens passant par les pôles, il est arbitraire de placer le point 0,

c'est-à-dire le premier méridien, à l'endroit où il convient le mieux. C'est ainsi que l'Angleterre a choisi comme point de départ le méridien qui passe par l'observatoire de Greenwich, aux environs de Londres; la France a fait choix de celui qui passe par l'observatoire de Paris, et d'autres peuples ont fait passer leur premier méridien par l'île de Fer. Les divisions du cercle de l'équateur sont appelées *degrés de longitude* et se comptent, tant à l'est qu'à l'ouest du premier méridien, de 0 à 180 degrés.

En imaginant des cercles *parallèles* à l'équateur passant par chaque division du cercle méridien et des cercles méridiens passant par chaque division du cercle de l'équateur, la *latitude* d'un point sera donc la distance en degrés du cercle parallèle passant par ce lieu à l'équateur et sa *longitude* sera la distance en degrés du méridien de ce lieu au méridien choisi comme origine.

Ces valeurs constituent ce qu'on nomme les *coordonnées géographiques* d'un point et la position de ce point sur le globe terrestre sera parfaitement déterminée lorsqu'on connaîtra sa longitude *est* ou *ouest* et sa latitude *nord* ou *sud*. Ainsi on dira que les coordonnées géographiques de la ville de Neuchâtel en Suisse sont :

46°59′15″ de latitude nord;

1°35′54″ de longitude est du méridien de Paris.

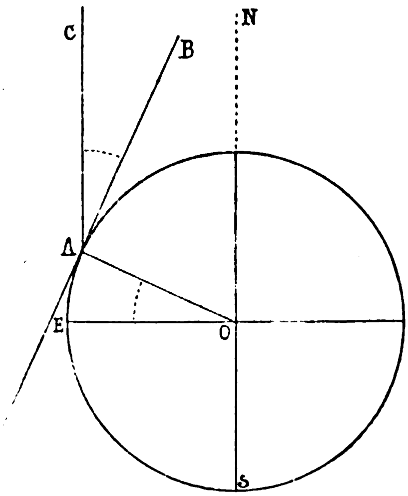


Fig. 3.

15. Pour déterminer pratiquement la latitude d'un point A (fig. 3), le plus simple est de mesurer l'angle formé par une ligne horizontale AB et par la ligne AC aboutissant à l'étoile polaire. En effet, les étoiles fixes étant prodigieusement éloignées de la terre, qui n'est qu'un point par rapport

à cette énorme distance, on peut dire sans erreur appréciable que toutes les droites menées de la terre à l'étoile polaire sont parallèles entre elles, ce qui est du reste conforme à l'expérience.

Comme l'étoile polaire se trouve à peu près sur le prolongement de l'axe de la terre, la droite que l'on imagine tracée d'un point quelconque du globe à cet astre, est parallèle à l'axe. Nous pouvons donc dire que la latitude d'un lieu tel que A, qui est en réalité l'angle AOE, est représentée par l'angle BAC; effectivement les angles AOE et BAC sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun. On voit donc que la latitude d'un lieu est égale à la hauteur du pôle céleste au-dessus de l'horizon. Pour la déterminer avec une plus grande exactitude, il faut tenir compte de la distance de l'étoile polaire à l'axe et de la réfraction des rayons lumineux.

16. Les moyens dont on dispose pour déterminer la longitude par des observations directes, sont peu pratiques; aussi se sert-on de préférence d'un chronomètre de marine dont la marche diurne est connue.

Supposons qu'un navire se trouve un jour en un certain point que nous désignerons par A, que l'on fasse l'observation du passage du soleil au méridien et que l'on ait noté l'avance ou le retard de l'heure marquée par le chronomètre en cet instant. Appelons C_0 le nombre d'heures, minutes et secondes indiquées par la montre au moment précis du passage du soleil au méridien. Un ou plusieurs jours plus tard, on répète cette observation et l'on trouve, supposons, une nouvelle correction que nous désignerons par C.

La différence de C_0 et de C divisée par 4 minutes nous donnera le nombre de degrés dont le navire a avancé dans l'un ou l'autre sens de la longitude.

En effet, comme la terre emploie 24 heures pour accomplir une rotation complète de 360 degrés, il lui faudra $\frac{24 \text{ h.}}{360^\circ}$, soit 4 minutes, pour parcourir un degré. On comprend qu'il

faille encore tenir compte, dans le calcul, de la *marche diurne* du chronomètre ; cette valeur est une moyenne calculée sur un grand nombre d'observations antérieures. Toute l'exactitude de cette méthode repose donc sur la régularité absolue de la marche quotidienne des montres marines.

Les valeurs C_0 et C sont des valeurs algébriques, c'est-à-dire des quantités précédées des signes positif (+) ou négatif (—), puisque le chronomètre peut être en retard ou en avance sur l'heure du passage du soleil au méridien. Examinons maintenant lequel de ces signes convient à l'avance de la montre et lequel désignera le retard.

En premier lieu, il est évident que ce choix est arbitraire; ainsi à l'Observatoire de Greenwich, on a adopté le signe négatif pour le retard et positif pour l'avance. Ce choix semble de prime abord assez normal, mais, à Neuchâtel, on s'est placé à un point de vue différent. Lorsque le chronomètre *retarde* sur le passage du soleil, pour retrouver l'heure vraie, il faut *ajouter* à l'heure de la montre la correction C : cette valeur doit donc être précédée du signe positif. Tandis que, lorsque le chronomètre *avance* sur le passage du soleil, il faut *retrancher* la correction C pour obtenir l'heure vraie : dans ce cas donc, cette valeur doit recevoir le signe négatif. C'est cette manière de voir qui a présidé, à l'Observatoire de Neuchâtel, à l'adoption des signes + pour le retard et — pour l'avance des chronomètres sur l'heure moyenne.

17. Nous avons dit qu'un chronomètre ne suivant jamais exactement l'heure moyenne, on doit déterminer sa marche diurne dans un observatoire, puisqu'il faut tenir compte de cette marche diurne dans la détermination des longitudes. Désignons par A cette valeur moyenne et, puisqu'elle peut être de l'avance ou du retard, faisons la précéder du signe négatif ou positif. Le chronomètre est observé au moment du passage du soleil au méridien ; cette observation donnant l'heure vraie, il faudra en déduire l'heure moyenne. Appelons B la différence entre l'heure moyenne et l'heure vraie

(équation du temps) et déterminons le signe de cette dernière valeur.

Comme il s'agit de ramener la correction C à l'heure moyenne, on raisonnera en disant que, si le temps moyen à midi vrai est en avance, le temps vrai est en retard sur l'heure moyenne et la valeur B doit recevoir le signe +. Par contre, si le temps moyen est en retard sur le temps vrai, B reçoit le signe —.

Supposons maintenant qu'un navire quitte un port de mer dont la longitude est E_0 degrés ouest de Paris. Le jour du départ on a observé le passage du soleil et obtenu une correction C_0. La correction C'_0 du chronomètre sur l'heure moyenne sera pour ce jour

$$C'_0 = C_0 \pm B_0.$$

Au bout de N jours on répète l'observation du passage du soleil et on obtiendra une correction C entre l'heure du chronomètre et l'heure vraie; la correction C' entre l'heure du chronomètre et l'heure moyenne sera exprimée par

$$C' = C \pm B.$$

La différence D entre l'heure du départ et l'heure du lieu où le vaisseau se trouve, sera

$$D = (C \pm B) - (C_0 \pm B_0) \pm NA.$$

Réduisant cette valeur en minutes, on aura la longitude E en degrés par la division :

$$E = \frac{(C \pm B) - (C_0 \pm B_0) \pm NA}{4} + E_0.$$

18. Prenons un exemple numérique. La longitude du Hâvre à l'ouest du méridien de Paris étant de 2° 13′ 45″, imaginons un navire quittant ce port le 3 novembre 1907. L'heure indiquée ce jour-là par un chronomètre de marine au moment du passage du soleil au méridien est de $11^h\ 43^m\ 42^s$. L'équation du temps est pour cette date $+\ 16^m\ 21^s$. On aura donc noté la correction :

$$C'_0 = 11^h\ 43^m\ 42^s + 16^m\ 21^s = 12^h\ 0^m\ 3^s.$$

Quatre jours après, une nouvelle observation montre qu'au

moment du passage du soleil le chronomètre indique $11^h\ 28^m\ 57^s$. Pour le 7 novembre, l'équation du temps étant de $+\ 16^m\ 57^s$, la nouvelle correction sera

$$C' = 11^h\, 28^m\, 57^s + 16^m\, 17^s = 11^h\, 45^m\, 14^s.$$

La différence

$$D = 12^h\ 0^m\ 3^s - 11^h\ 45^m\ 14^s \pm NA$$

donne, en soustrayant,

$$D = 14^m\ 49^s. \pm NA.$$

Supposant que la marche diurne moyenne du chronomètre soit $A = -0^s,5$, on aura

$$NA = 4 \times -0^s,5 = -2^s,$$

donc $$D = 14^m\ 49^s - 2^s = 14^m\ 47^s.$$

On aura enfin la longitude cherchée par

$$E = \frac{14^m\ 47^s}{4} + 2^o\ 13'\ 45'';$$

en effectuant la division on obtiendra

$$E = 3^o\,41'\,45'' + 2^o\ 13'\,45'' = 5^o\,55'\,30''$$

Le navire se trouvera donc le 7 novembre à midi à $5^o 55' 30''$ de longitude ouest de Paris.

19. **Heure légale.** — Le mouvement de la terre autour de son axe s'effectuant en 24 heures et la circonférence de l'équateur étant divisée en 360°, il en résulte qu'en une heure la terre parcourt un chemin angulaire de $\frac{360^o}{24} = 15^o$. En prenant comme point zéro de la division le méridien qui passe par l'Observatoire de Greenwich (Angleterre) et le mouvement de la terre s'effectuant de l'ouest vers l'est, il en résulte que, lorsqu'il est midi pour tous les points situés sur le méridien de Greenwich, il est une heure du soir sur tous les points placés sur le 15e cercle méridien à l'est du premier, deux heures sur le 30e et ainsi de suite.

20. Le système des *fuseaux horaires*, auquel ont déjà adhéré un grand nombre d'Etats, consiste, en prenant

comme point de départ le méridien de Greenwich, à le considérer comme placé au milieu du premier fuseau, qui s'étend par suite à 7°30′ (ou 30 minutes en temps) de longitude des deux côtés de ce méridien. Tous les points de la terre situés dans ce fuseau marquent au même instant l'heure temps moyen de Greenwich qu'on a dénommée l'*heure de l'Europe occidentale.*

Les points situés dans le fuseau suivant, en allant vers l'est, marquent l'*heure de l'Europe centrale*, qui avance exactement d'une heure sur l'heure de Greenwich, ou de 50^m39^s sur l'heure légale de France, qui n'a pas adhéré jusqu'ici au système des fuseaux horaires.

Dans le fuseau suivant on marque l'*heure de l'Europe orientale*, qui avance de deux heures sur l'heure de Greenwich. Et ainsi de suite pour les autres fuseaux (24 au total), qui couvrent la surface terrestre.

En Angleterre, en Belgique, en Hollande, au Luxembourg et en Espagne, l'heure légale est l'heure de l'Europe occidentale (H.E.O.).

En Allemagne, au Autriche, en Suisse, au Danemark, en Italie, en Bosnie, en Herzégovine, en Serbie, en Suède, en Norvège, au Congo, l'heure adoptée est l'heure de l'Europe centrale (H.E.C.).

Il est intéressant de remarquer qu'en Italie et en Belgique les heures sont composées d'une manière continue de 0 à 24, en commençant à minuit; en sorte que les heures de 0 à 12 désignent les heures du matin et celles de 12 à 24 les heures du soir.

En Bulgarie, en Roumanie, en Egypte et sur les chemins de fer de la Turquie d'Europe on a adopté l'heure de l'Europe orientale (H.E.E.).

Comme, dans nos régions, les horloges et les montres indiquent l'heure de l'Europe centrale, on devra ajouter à l'heure locale la différence de temps qui existe entre cette heure locale et l'heure du méridien axial du fuseau.

Cette différence est pour Neuchâtel de $32^m 10^s$; ainsi,

quand il est midi moyen à Neuchâtel (heure locale), les montres et horloges doivent indiquer $12^h\ 32^m\ 10^s$.

Cette différence est de

$35^m\ 23^s$	pour	Genève (observatoire),
$35^m\ 4^s$	»	Le Sentier (Vaud),
$33^m\ 40^s$	»	Fleurier,
$33^m\ 1^s$	»	Le Locle,
$32^m\ 41^s$	»	La Chaux-de-Fonds,
$32^m\ 10^s$	»	Neuchâtel (observatoire),
$32^m\ 0^s$	»	Saint-Imier,
$31^m\ 42^s$	»	Porrentruy,
$31^m\ 0^s$	»	Bienne,
$29^m\ 50^s$	»	Soleure.

Elle est en outre de 26^m pour Zurich, 30^m pour Berne; elle est encore de $50^m\ 39^s$ pour Paris, 6^m pour Berlin. Pour Vienne (Autriche), on devra retrancher du temps moyen local 5^m et demie.

Remarquons que la différence entre l'heure moyenne locale et l'heure de l'Europe centrale se rapporte au centre de l'endroit en question (quand l'indication n'a pas rapport à un observatoire astronomique). Un déplacement de l'observateur de 330 mètres environ dans la direction est-ouest produit une différence de 1^s dans la différence des longitudes pour les régions des localités suisses ci-dessus.

II. Principes généraux de mécanique.

21. **Des forces.** — Toute cause qui produit ou modifie les mouvement d'un corps, est une *force*. Une force peut être *puissance* ou *résistance*, c'est-à-dire qu'elle peut, sans perdre son caractère *actif*, agir dans le sens ou en sens contraire du mouvement. Tels sont les effets produits par les êtres animés, le vent, la vapeur, les chutes d'eau, etc.

Les forces *passives* existent naturellement et peuvent dé-

truire partiellement ou totalement le mouvement, mais sont incapables de le produire; tels sont entre autres les effets produits par les frottements, la résistance de l'air, etc.

22. Nous pouvons apprécier d'une manière très précise la grandeur des forces par leurs effets. La valeur d'une force peut toujours être représentée par un poids, tel que le kilogramme ou le gramme, qui lui ferait équilibre. Ainsi la force exercée par un homme pour mettre en mouvement un char aura sa grandeur mesurée par un certain nombre de kilogrammes. Supposons en effet une corde fixée au char et passant sur une poulie fixe placée en avant du véhicule; si nous suspendons des poids à l'extrémité libre de la corde et que nous augmentions ces poids jusqu'à ce que le char se mette en mouvement, le total de la charge nous donnera la mesure de l'effort déployé par l'homme pour produire le mouvement désiré.

23. En règle générale on donne le nom de *force motrice* à toute puissance qui met un corps en mouvement et, par contre, celui de *force résistante* à toute force active ou passive en opposition à ce mouvement.

24. Sans pouvoir définir la nature des forces, les sensations qu'elles nous causent d'une manière permanente, font que nous acquérons instantanément l'idée de leur *intensité* et de leur *direction*.

On représente les directions des forces par des lignes droites suivant lesquelles elles tendent à faire mouvoir les corps qu'elles sollicitent. En convenant de représenter leurs intensités par des longueurs qui leur soient proportionnelles, il en résulte qu'on peut soumettre les forces au calcul comme toutes les autres quantités.

25. Le *point d'application* d'une force est le point d'un corps sur lequel elle agit directement pour modifier l'état de mouvement ou de repos de ce corps.

26. Le *sens* d'une force est celui suivant lequel elle tend à faire mouvoir son point d'application.

27. Une force capable de remplacer, à elle seule, un sys-

tème de forces agissant sur un corps se nomme la *résultante* de toutes ces forces. Ces dernières sont appelées les *composantes* de la force unique capable de les remplacer.

28. On appelle *trajectoire* la ligne que suit un point mobile. Le mouvement est dit *rectiligne* ou *curviligne* selon que la trajectoire est une droite ou une courbe.

29. **Loi de l'inertie.** — L'expérience a fait admettre une loi à laquelle tous les corps sont soumis et qui constitue un principe fondamental de la mécanique. Cette loi, connue sous le nom de *principe de l'inertie*, peut se définir comme suit :

Un corps matériel ne peut de lui-même se mettre à l'état de mouvement s'il est au repos, et réciproquement, s'il est en mouvement, il ne peut de lui-même modifier son mouvement.

30. **Définition de la mécanique.** — La mécanique est la science des forces et de leurs effets. Elle a pour but de trouver les relations des forces qui sollicitent un corps ou un système de corps, pour que ce corps ou ce système prenne dans l'espace un mouvement déterminé ; et, réciproquement, étant donné un corps ou un système de corps, de trouver le mouvement que ce corps ou système de corps prendra dans l'espace sous l'action de forces données.

Ce problème général comprend celui où les forces ne changent rien à l'état du corps ou du système, cas particulier dans lequel on dit que les forces se font *équilibre*. De là vient la division de la mécanique en *statique* ou science de l'équilibre et en *dynamique* ou science du mouvement.

On peut encore étudier les mouvements des corps en ayant égard seulement à leur direction, à leur intensité et à leur durée, en faisant abstraction de la matière dont les corps sont formés et des forces qui produisent ou modifient ces mouvements. Cette étude forme une partie de la mécanique à laquelle on a donné le nom de *cinématique* et que l'on peut aussi appeler mécanique géométrique.

31. **Du mouvement.** — Le mouvement est *uniforme* lorsque,

en temps égaux quelconques, les longueurs parcourues sont égales.

On appelle *vitesse* l'espace parcouru pendant l'unité de temps; on aura donc, en désignant par v la vitesse, e l'espace et t le temps :

$$e = vt,$$

d'où l'on tire :

$$v = \frac{e}{t} \text{ et } t = \frac{e}{v}$$

32. Le mouvement est dit *varié* si les espaces parcourus en temps égaux quelconque sont inégaux, c'est-à-dire quand la vitesse du mobile n'est pas constante pendant toute la durée du mouvement.

33. Lorsqu'un mobile parcourt certains espaces égaux en temps égaux, sans que la même condition soit remplie pour les parties de ces espaces, on dit que le mouvement est *périodiquement uniforme*. Tels sont, par exemple, le mouvement de la terre autour du soleil et le mouvement oscillatoire d'un pendule, dans les petites amplitudes.

34. Le mouvement est *uniformément varié* lorsque la vitesse du mobile varie de quantités égales en des temps égaux.

L'*accélération* est alors la quantité dont varie la vitesse pendant l'unité de temps.

Si dans le mouvement uniformément varié la vitesse augmente, l'accélération est positive et on dit que le mouvement est *uniformément accéléré*.

Si la vitesse diminue, l'accélération est alors négative et le mouvement est dit *uniformément retardé*.

Dans un mouvement varié, à un instant donné t, la *vitesse* est le chemin qui serait parcouru pendant la seconde succédant au temps t, si le mouvement devenait uniforme à l'instant considéré.

Dans le mouvement uniformément varié, la vitesse, à un instant donné t, est égale à

$$v = v_0 \pm jt,$$

v_0 représentant la vitesse initiale et j l'accélération positive ou négative suivant que le mouvement considéré est accéléré (+) ou retardé (—).

L'espace parcouru est représenté par la formule

$$e = v_0 t \pm \frac{1}{2} jt^2$$

Lorsque la vitesse initiale est nulle, les deux formules ci-dessus se réduisent simplement à

$$v = jt$$

$$e = \frac{1}{2} jt^2$$

35. Le mouvement d'un corps qui tombe sous l'action de la *pesanteur*, est uniformément accéléré. Dans ce cas, on désigne l'accélération due à la pesanteur par la lettre g ; cette valeur est constante pour un même lieu et vaut pour nos régions :

$$g = 9^m 8088.$$

Cette valeur représente le double de l'espace parcouru pendant la première seconde par un corps tombant librement et sans vitesse initiale.

Les formules relatives à la chute des corps sont naturellement les mêmes que les précédentes, sauf modification des lettres. On a :

$$v = gt \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2} gt^2$$

En éliminant t entre ces deux équations on obtient encore

$$v = \sqrt{2gh},$$

h = hauteur de chute.

36. **Du mouvement de rotation.** — Un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe quand chacun de ses points décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre se trouve sur cet axe. Dans ce mouvement, deux points quelconques du corps décrivent, pendant le même temps, des arcs semblables, c'est-à-

dire d'un même nombre de degrés, mais les longueurs de ces arcs sont différentes et doivent être proportionnelles à leur distance de l'axe. Soient e et e' les arcs parcourus dans le même temps par deux points m et m' (fig. 4) situés à des distances r et r' de l'axe de rotation ; on devra avoir :

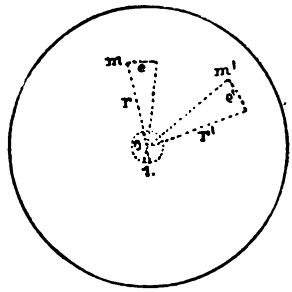


Fig. 4.

$$\frac{e}{e'} = \frac{r}{r'}.$$

Le mouvement de rotation est uniforme si, en des temps égaux, un point du corps décrit toujours des arcs égaux.

La vitesse d'un tel mouvement ne peut être déterminée que si l'on envisage à la fois le chemin parcouru en une seconde par un point du corps et la distance de ce point à l'axe de rotation. Pour éviter cette double donnée, on considère particulièrement les points qui sont à l'unité de distance de l'axe et l'on appelle *vitesse angulaire* la longueur de l'arc décrit en une seconde par un point situé à l'unité de distance de l'axe.

Soit ω cet arc, on aura pour la vitesse v d'un autre point situé à la distance r :

$$v = r\omega,$$

d'où l'on tire :

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Par conséquent, la vitesse angulaire s'obtient en divisant le chemin que parcourt en une seconde un point quelconque par le rayon de la circonférence qu'il décrit.

37. **Masse d'un corps.** — Un corps de poids P, dans un lieu dont l'accélération due à l'action de la pesanteur est g, transporté dans un autre lieu, accusera un poids P′ et une accélération g', de telle façon que l'on a les rapports égaux :

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}.$$

Cette proportion indique que le quotient $\frac{P}{g}$ est, pour un corps donné, indépendant du lieu où l'on opère ; on lui a donné le nom de *masse*. Si l'on représente par m la valeur de ce quotient, on a

$$m = \frac{P}{g}.$$

expression qui signifie que la masse d'un corps est égale au rapport constant qui existe entre le poids de ce corps et la valeur de l'accélération du lieu où l'on se trouve.

On entend communément par masse d'un corps la plus ou moins grande quantité de matière qu'il renferme. Deux corps possèdent même quantité de matière ou ont même masse lorsque, soumis à l'action d'une même force, ils en reçoivent le même mouvement. D'une manière générale on peut dire que les masses de différents corps sont des grandeurs proportionnelles aux forces nécessaires pour leur imprimer le même mouvement pendant le même temps, c'est-à-dire la même accélération.

La masse est donc une qualité inhérente à chaque corps, indépendante de son état de mouvement ou de repos, ainsi que de sa position par rapport aux autres corps de l'univers ; on peut la considérer comme mesurant, pour chaque corps, sa résistance au mouvement.

Seul, le poids d'un corps ne pourrait suffire à définir la masse de ce corps, attendu que le poids d'un même corps varie d'un lieu à l'autre, du pôle à l'équateur, du fond d'une vallée au sommet d'une montagne. L'expérience démontre qu'en un même endroit tous les corps, sous l'action de la pesanteur, prennent la même accélération. Par suite, si l'on représente par P, P', P'', etc., les poids de différents corps dans un même lieu et par m, m', m'', etc., leurs masses respectives, l'accélération g du lieu d'expérimentation sera

$$\frac{P}{m} = \frac{P'}{m'} = \frac{P''}{m''} = \cdots = g.$$

De la formule

$$m = \frac{P}{g}$$

on tire

$$P = mg,$$

ce qui signifie que le poids d'un corps en un lieu donné est égal au produit de sa masse par l'accélération de la pesanteur en ce lieu.

De même, si l'on fait agir sur un corps une force quelconque, F, communiquant à ce corps un mouvement dont l'accélération est j, on aura :

$$m = \frac{F}{j} \quad \text{ou} \quad j = \frac{F}{m} \quad \text{ou} \quad F = mj.$$

Une force peut donc être définie par le produit d'une masse par l'accélération du mouvement que prend le corps dans l'espace sous l'action de cette force.

L'unité de masse est la masse du *gramme*, unité fondamentale du sytème C. G. S. (centimètre-gramme-seconde).

38. Le produit Mv de la masse M d'un mobile par la vitesse v qu'il possède, prend le nom de *quantité de mouvement*.

Travail d'une force.

39. **Définition.** On appelle en mécanique *travail d'une force* ou *énergie* le produit de l'intensité de cette force par le chemin que parcourt son point d'application. Autrement dit, le travail effectué par une force constante en grandeur et en direction se représente par le produit de l'intensité de cette force par la projection, sur la direction de la force, de l'espace que parcourt le point d'application.

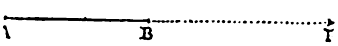


Fig. 5.

Ainsi, le chemin et la force étant dans la même direction, on aura (fig. 5):

$$Tr = F \times AB.$$

Si le chemin AB et la force F n'ont pas la même direction, on projettera dans ce cas le chemin AB sur la direction AF et l'on aura (fig. 6) :

$$Tr = F \times AC.$$

Remarquons que la projection du chemin sur la force est d'autant plus grande que l'angle BAC est petit ; le travail sera donc maximum quand AB et AF auront la même direction. Si l'angle BAF devient plus grand, la projection AC diminue et devient nulle lorsque l'angle devient égal à 90° ; dans ce dernier cas, le travail est nul.

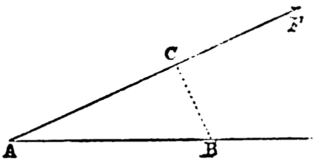


Fig. 6.

40. **Travail d'une force tangente à une roue.** En imaginant le mouvement de rotation de la roue très petit, on peut admettre que le mouvement ait lieu suivant la tangente. Appelons F la force et *e* l'espace parcouru dans sa direction, on aura pour ce faible déplacement :

$$Tr = F \times e$$

Quand la roue aura fait un tour complet, le chemin *e* sera devenu une circonférence et l'on aura le travail pour un tour exprimé par

$$Tr = F \times 2 \pi r.$$

41. **Unités de travail.** La définition du travail en fixe l'unité, qui doit être l'unité de force déplaçant son point d'application de l'unité de longueur dans sa propre direction. En particulier dans le système métrique, où l'unité de force est le poids du kilogramme et l'unité de longueur le mètre, on a pris comme unité de travail le *kilogrammètre* : c'est le travail nécessaire pour soulever un kilogramme à la hauteur d'un mètre. En horlogerie l'unité de force est le gramme et l'unité de longueur le millimètre, ce qui donne le *grammillimètre* comme unité de travail. Par abréviation, nous nous servirons des lettres gr.mm. pour représenter cette dernière

unité. Si, par exemple, la force est 3,5 grammes et le chemin 0,4 millimètre, le travail de la force sera :

$$Tr = 3{,}5 \times 0{,}4 = 1{,}4 \text{ gr.mm.}$$

Dans le système C. G. S., où l'unité de force est la *dyne*[1] et l'unité de longueur le centimètre, l'unité de travail, qu'on appelle *erg*, est le travail d'une dyne déplaçant son point d'application d'un centimètre dans sa propre direction. L'erg est un très petit travail ; aussi, pour éviter que les travaux usuels soient exprimés par des nombres trop grands, on a pris dans le système C. G. S. une unité secondaire, *le joule* qui vaut dix millions d'ergs.

Un kilogrammètre vaut 9,81 joules. Ces dernières unités n'ont pas encore prévalu en mécanique pratique.

42. **Puissance.** — La puissance est l'énergie produite pendant l'unité de temps ; elle est donc le quotient d'un travail par un temps. En pratique industrielle on emploie le *kilogrammètre par seconde* comme unité de puissance et en horlogerie le *grammillimètre par seconde.*

On appelle *watt* la puissance d'une machine capable de produire un joule par seconde. Dans la pratique on remplace habituellement le watt, qui est une unité très faible, par son multiple le *kilowatt*, dont la valeur est de 1000 watts. On peut dire par exemple qu'une machine a une puissance de 10, 15, 20 kilowatts.

Le *cheval-vapeur* est également une unité industrielle de puissance ; il vaut 75 kilogrammètres par seconde et, par suite,

$$9{,}81 \text{ joules} \times 75 = 1 \text{ cheval-vapeur} = 736 \text{ watts.}$$

Le kilowatt vaudra donc

$$\frac{1000}{736} = 1{,}36 \text{ cheval-vapeur.}$$

Le *poncelet* est encore une unité industrielle de puissance

[1] La *dyne* est la force qui, agissant sur une masse de 1 gramme, lui imprime une accélération de 1 centimètre par seconde par seconde.

valant 100 kilogrammètres par seconde. Un poncelet vaut donc 981 watts.

43. **Puissance vive ou énergie cinétique.** — Un corps de poids P qui tombe d'une hauteur h, engendre un certain travail que l'on peut représenter par le produit

$$P \times h.$$

On prouve en mécanique que tout corps tombant d'une hauteur h est animé d'une vitesse v qui est liée à la hauteur h par la relation (35)

$$v^2 = 2\,gh,$$

expression de laquelle on peut tirer

$$h = \frac{v^2}{2\,g}.$$

Remplaçant, dans l'équation du travail Ph, h par cette dernière valeur, on aura

$$Ph = P \times \frac{v^2}{2\,g},$$

qu'on peut écrire aussi

$$Ph = \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,v^2.$$

Mais $\frac{P}{g}$ étant la masse m du corps (37), on aura enfin

$$Ph = \frac{1}{2}\,mv^2.$$

L'expression $\frac{1}{2}\,mv^2$ a reçu le nom de *puissance vive* ou *énergie cinétique*. On peut donc dire que la puissance vive d'un corps en mouvement est le demi-produit de sa masse par le carré de sa vitesse; ou encore que le travail mécanique qui imprime une certaine vitesse à un corps est égal à la puissance vive qui anime ce corps.

On donne le nom de *force vive* au double de la puissance vive; on a ainsi:

$$\text{Puissance vive} = \frac{1}{2}\,mv^2,$$

$$\text{Force vive} = mv^2.$$

44. Tout corps en mouvement possède du travail. En effet, le corps a une masse m et il possède une vitesse v, puisqu'il est en mouvement; par suite, le produit $\frac{1}{2} mv^2$ nous donne la valeur de travail Ph, auquel correspond la vitesse v; on peut donc dire que tout corps en mouvement est capable de produire un travail.

Moment d'une force.

45. Imaginons maintenant deux cylindres de diamètres différents tournant autour d'un axe O (fig. 7) et admettons par exemple, que le premier soit 3 fois plus grand que le second. Suspendons des poids à l'extrémité de fils légers enroulés autour de chaque cylindre, de façon que chacun de ces poids agisse en sens contraire. Pour que l'équilibre puisse exister dans ce système, on constatera que le poids fixé au petit cylindre doit être 3 fois plus grand que celui qui est fixé au grand. En effet, si nous faisons tourner les cylindres d'un tour, l'un des poids s'élèvera tandis que l'autre s'abaissera; le poids p parcourant un chemin représenté par $2\pi \times 3$, son travail sera

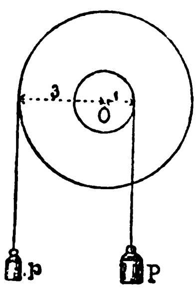


Fig. 7.

$$2\pi \times 3\,p.$$

Le poids P parcourt un chemin de $2\pi \times 1$ en produisant dans le même temps un travail

$$2\pi \times 1\ \mathrm{P}.$$

Comme nous avons $3\,p = \mathrm{P}$, on pourra poser

$$(a)\quad 2\pi \times 3\,p = 2\pi \times 1\ \mathrm{P}$$

et il y aura équilibre, parce que le travail mécanique de l'un des poids est égal à celui de l'autre. L'égalité des travaux de ces deux poids existera aussi lorsqu'on ne fera décrire aux

cylindres qu'une fraction de tour, si petite que cette fraction puisse être.

En divisant l'égalité (a) par 2π, on obtient

$$3\,p = 1\ P.$$

Les chiffres 3 et 1 sont les longueurs respectives des rayons de chaque cylindre ; ce rayon prend le nom de *bras de levier* et le produit ci-dessus de l'intensité de la force par le bras de levier s'appelle le *moment de la force*.

En somme, nous venons d'examiner l'état d'un corps pouvant tourner autour d'un point fixe ; à ce corps sont appliquées deux forces dont les travaux, se détruisant mutuellement, produisent l'équilibre. On donne à un tel système le nom de *levier*.

Dans tout levier, pour que l'équilibre existe, il faut donc que les moments des deux forces en action soient égaux.

En imaginant le système en mouvement sous l'action d'une impulsion extérieure, on obtiendra le *travail* des forces en multipliant leur *moment* par l'angle parcouru ; dans ce nouvel état du corps, les travaux des forces seront alors égaux.

16. **Levier.** — Pratiquement, un *levier* est un corps solide, mobile autour d'un point fixe et sollicité par deux forces tendant à le faire tourner en sens contraires.

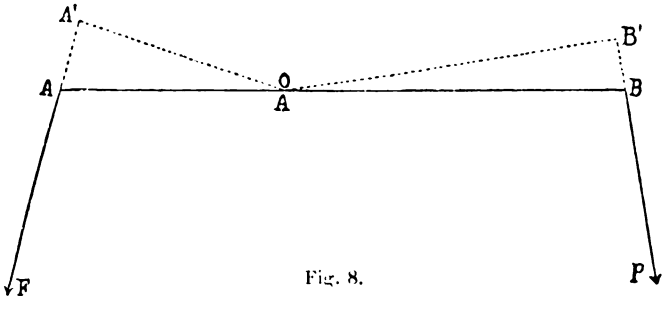


Fig. 8.

La figure 8 représente un levier dans lequel O est le point fixe, P et F les deux forces. Les *bras de levier* des forces P et F sont les distances du point fixe O aux deux forces, c'est-

à-dire les perpendiculaires OA′ et OB′ tirées sur les directions de ces forces.

D'après ce que nous avons dit plus haut, l'équilibre existera lorsque le *moment* de la force P sera égal au moment de la force F, c'est-à-dire lorsque

$$F \times OA' = P \times OB'$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{F}{P} = \frac{OB'}{OA'}$$

Les deux forces doivent donc être en raison inverse de leurs bras de levier.

47. On distingue souvent deux sortes de leviers: dans le levier du premier genre, le point d'appui est situé entre les points d'application des deux forces ; dans les autres, ce point fixe est situé à l'une des extrémités du corps. Au point de vue théorique, cette distinction est inutile et les conditions d'équilibre du levier s'appliquent à tous les cas.

Transmission du travail dans les machines.

48. On donne le nom de *machine* à tout système de corps destiné à transmettre le travail des forces. Pour faire comprendre de quelle façon s'opère cette transmission, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails.

Les mouvements relatifs des différents organes d'une machine ne sont pas seulement déterminés en direction, mais aussi en intensité. Généralement, les mouvements sont périodiques uniformes (33) ; la vitesse est mise en harmonie avec les exigences des travaux industriels à produire, sans qu'elle atteigne jamais la limite à laquelle la solidité de la machine pourrait être compromise.

49. Sur une machine en mouvement agissent différentes forces, qu'on peut diviser en trois classes :

1° Les *forces motrices* : ce sont celles qui agissent dans le

sens du mouvement des organes qu'elles sollicitent; c'est par conséquent à elles qu'est dû le mouvement de la machine.

2° Les *forces résistantes utiles*, qui sont les forces que les matières sur lesquelles opère la machine, opposent au mouvement des organes qui les sollicitent; ce sont donc celles qu'on a pour but de vaincre.

3° Les *forces résistantes passives* ou *nuisibles*, qui naissent du mouvement des différents organes de la machine pour s'opposer à ce mouvement; nous avons déjà vu qu'elles sont dues au frottement de ces organes entre eux ou sur des corps étrangers, aux chocs qui peuvent se produire entre ces organes par suite de changements brusques de vitesse, à la résistance de l'air, etc.

Considérant les forces motrices comme positives, puisqu'elles agissent dans le sens du mouvement, les résistances utiles et les résistances passives seront alors négatives. Si l'on suppose le système animé d'un mouvement uniforme, la somme algébrique des travaux de toutes les forces pour un temps quelconque sera nulle, puisque le gain ou la perte de puissance vive est nul, et l'on aura, en désignant par Tr_m le travail des forces motrices, Tr_u le travail utile et Tr_p le travail des forces passives :

$$Tr_m - Tr_u - Tr_p = 0,$$

d'où

$$Tr_m = Tr_u + Tr_p,$$

ce qui fait voir que, le mouvement étant uniforme, le travail moteur est égal au travail utile augmenté du travail des forces passives.

Lorsque, dans une machine quelconque, cette formule se vérifie, on dit alors qu'il y a « équilibre dynamique ».

Quand le mouvement d'une machine est périodiquement uniforme, le gain ou la perte de puissance vive n'est nul que pour un nombre entier de périodes; pour ce temps, on a encore

$$Tr_m = Tr_u + Tr_p.$$

On dit alors que la machine est en « équilibre dynamique périodique » ; c'est l'état ordinaire des machines, non seulement à cause de la forme de leurs organes, mais à cause des variations plus ou moins grandes des forces motrices et surtout des résistances. Ainsi, Tr_u est toujours inférieur à Tr_m ; c'est-à-dire qu'une machine rend moins de travail utile qu'on ne lui applique de travail moteur, car le travail des résistances passives n'est jamais nul.

50. Appelant P la force motrice agissant sur une machine quelconque et Q la résistance utile vaincue par cette machine, E et *e* étant les espaces parcourus par les points d'application de P et de Q dans la direction de ces forces et dans un même temps quelconque au commencement et à la fin duquel la vitesse de la machine est la même, l'équation d'équilibre dynamique donne, en supposant d'abord nulles les résistances passives :

$$PE = Qe \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{e}{E}.$$

De l'égalité entre le travail de la puissance et celui de la résistance, il résulte que pour un même travail moteur PE, suivant que la force Q sera multipliée par $^1/_3$, $^1/_2$, 2, 3, etc., l'espace *e* sera respectivement divisé par les mêmes nombres; de là découle la maxime bien connue en mécanique : « Ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse ou, ce qui revient au même, en espace, et réciproquement. »

La proportion précédente permet de calculer l'une quelconque des quatre quantités P, Q, E, *e*, quand on en connaît les trois autres.

Pour une machine quelconque, simple ou compliquée, s'il s'agit de trouver la résistance Q que pourra vaincre une puissance P, on détermine les espaces E et *e* parcourus dans le même temps par les points d'application des forces P et Q. E et *e* sont quelconques si ces points d'application ont des mouvements uniformes ; mais on les prend correspondant à une période si le mouvement de la machine est périodique. Lorsque la machine est construite, c'est en la mettant en mouvement d'une manière quelconque qu'on détermine les

valeurs de E ; on déduit celles de e d'après les rapports des espaces parcourus par les différents organes qui transmettent le mouvement du point d'application de P à celui de Q.

Supposons que la résistance à vaincre Q soit de 100 kilogrammes et qu'il s'agisse de déterminer quelle sera la puissance de P en négligeant les résistances passives. On commence par déterminer les valeurs correspondantes de E et de e, comme il vient d'être indiqué. Soient $E = 2^m5$ et $e = 0^m80$; en remplaçant les lettres par leurs valeurs, dans l'équation précédente, on aura :

$$\frac{P}{100^k} = \frac{0,80}{2,5},$$

d'où

$$P = \frac{100 \times 0,80}{2,5} = 32 \text{ kilogrammes.}$$

Si l'on avait connu P, on aurait pu déterminer Q comme on vient de le faire pour P.

51. Dans les machines, surtout dans les machines industrielles, les résistances passives sont assez considérables pour qu'on ne puisse pas négliger le travail qu'elles absorbent ; l'équilibre dynamique est alors exprimé par

$$Tr_m = Tr_u + Tr_p.$$

Pour un certain déplacement des organes de la machine, les travaux Tr_m, Tr_u et Tr_p s'évaluent comme dans le cas précédent ; ainsi, P étant la puissance, Q la résistance utile, R, R',.... les diverses résistances passives et E, e, i, i',.... les espaces correspondants parcourus dans le même temps par les points d'application dans la direction de ces forces, on a

$$PE = Qe + Ri + R'i' + \ldots..$$

52. Il peut arriver qu'une ou plusieurs résistances nuisibles proviennent de chocs entre les organes de la machine. Le travail absorbé par ces résistances n'est plus évalué par le produit d'une force par l'espace que parcourt son point d'application, mais par la perte de puissance vive due au

choc et cette perte, évaluée en unités de travail, entre dans le second membre de l'équation comme les autres travaux nuisibles, Ri, $R'i'$,....

A l'aide de l'équation précédente, connaissant dans une machine deux des trois travaux suivants : le $Tr_m = PE$, le $Tr_u = Qe$ et le $Tr_p = Ri + R'i' + ...$, on détermine le troisième.

53. On se propose ordinairement d'établir une machine capable de produire un travail utile donné,

$$Tr_u = Qe.$$

Il faut alors déterminer le $Tr_m = PE$, capable de produire non seulement ce travail utile, mais de vaincre aussi les travaux résistants secondaires.

On doit alors commencer par calculer ce travail nuisible, ce que l'on fait en déterminant les valeurs des différentes résistances passives R, R',.... en fonction de Q et par suite Tr_p en fonction de Tr_u.

Ayant Tr_p et Tr_u, on peut déterminer la valeur de Tr_m exprimée, comme il a été dit, en kilogrammètres ou en grammillimètres.

53. Le travail moteur Tr_m étant représenté par 100, les travaux utiles et nuisibles Tr_u et Tr_p étant, par exemple, 75 et 25, la perte est alors de 25 $^0/_0$. On dit dans ce cas que le *rendement* de la machine est de 75 $^0/_0$. S'il était possible que la perte fût nulle, le rendement serait de 100 $^0/_0$; ce fait, ne pouvant pas se réaliser, rend absolument illusoire l'hypothèse du mouvement perpétuel. Le rendement d'une machine dépasse rarement le 80 $^0/_0$; il est presque toujours bien inférieur à cette limite.

NOTA

Dans cette étude préliminaire, nous avons voulu poser une base, qui n'est autre que l'énonciation de quelques principes fondamentaux de mécanique. Dans le cours qui va suivre, nous ferons un constant usage de ces derniers et tous leurs développements se trouveront dans le texte.

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS GÉNÉRALES DES PENDULES ET DES MONTRES

Des oscillations du pendule et de leur rapport avec la force motrice.

54. On sait que, dans les horloges et les montres, le temps est mesuré par le mouvement périodiquement uniforme du *pendule* ou du *balancier*.

La chronique raconte que Galilée, tout jeune encore, fut frappé de la régularité des oscillations pendulaires d'un candélabre de la cathédrale de Pise. Il étudia les lois de ces oscillations et se servit plus tard du pendule pour ses observations astronomiques. Cet instrument, dans sa primitive simplicité, présentait deux inconvénients : lorsque cet astronome abandonnait son pendule à lui-même après l'avoir écarté de la position verticale, les oscillations qui se produisaient, ayant d'abord une certaine amplitude, diminuaient peu à peu, puis finissaient par s'éteindre. Il était donc obligé de donner de temps en temps une impulsion à son pendule. Le second de ces inconvénients était pour lui la nécessité de compter le nombre des oscillations. On dit qu'il chargea un domestique de l'exécution de ces deux fonctions.

Actuellement, le mécanisme des horloges exécute, à lui seul, ces deux travaux avec une régularité que l'homme ne saurait jamais atteindre directement.

55. Recherchons en premier lieu les causes qui font diminuer constamment les oscillations d'un pendule libre.

Lorsqu'un pendule est écarté de sa position d'équilibre OA (fig. 9), l'attraction de la terre, qui se trouvait parfaitement neutralisée par la résistance du point de suspension O, ne l'est plus dans la position oblique OB. Elle ferait descendre la lentille verticalement si le fil ne l'obligeait à décrire un arc de cercle ; à chaque instant de sa course de retour, la vitesse du pendule s'accélère d'une petite quantité jusqu'à ce qu'il atteigne de nouveau la position verticale OA. A partir de là, l'inertie ou, si l'on préfère, la vitesse acquise, l'entraîne à persévérer dans son mouvement en lui faisant décrire l'arc AB' ; dès cet instant aussi, la pesanteur, agissant en sens contraire du mouvement, tend à l'éteindre. La vitesse diminue constamment et deviendrait nulle au moment où la lentille parviendrait à une hauteur égale et symétrique à celle d'où elle est partie, s'il n'y avait d'autres forces que celles de la pesanteur qui agissent sur le pendule.

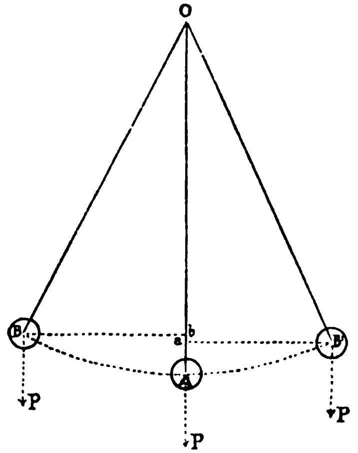


Fig. 9.

Ces forces exerçant leur action en sens contraire du mouvement sont les *résistances de la suspension* et de *l'air* ; c'est donc à elles qu'est due la diminution de l'amplitude des oscillations du pendule. Si ces forces pouvaient être supprimées, le mouvement serait perpétuel.

56. Il y a deux manières de suspendre un pendule : au moyen d'un couteau et au moyen de ressorts flexibles.

La *suspension à couteau* est faite de façon que le frottement soit très faible, sans qu'il puisse être cependant complètement annulé. On peut se servir de ce genre de suspension dans les régulateurs dont l'amplitude d'oscillation est généralement petite. Pour cet effet, on fixe transversalement à la tige du pendule une sorte de couteau que l'on termine,

à sa partie la plus mince, par un léger arrondi frottant dans l'intérieur d'une partie de cylindre creux (fig. 10). Le couteau, comme aussi le cylindre creux, doivent être confectionnés de matières excessivement dures et tout à fait polies. On peut donc envisager le couteau comme un pivot de petites dimensions. (Nous verrons plus loin que le travail du frottement est proportionnel à la pression et à la grandeur de l'amplitude.)

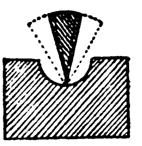


Fig. 10.

La *suspension à ressort* consiste à terminer l'extrémité supérieure de la tige du pendule par deux courtes lames d'acier fixées solidement d'autre part à une pièce fixe quelconque. Dans ce système, très employé aussi, il existe une perte de force résultant de la déformation des lames.

57. Pour ce qui concerne la *résistance de l'air*, on admet qu'elle est en raison directe de la plus grande section transversale du corps et du carré de la vitesse avec laquelle il traverse l'atmosphère ; elle dépend en outre de sa forme plus ou moins effilée. Le travail de cette force doit être proportionnel au cube de la grandeur des amplitudes.

58. Maintenant que nous connaissons la nature des forces qui agissent sur le pendule pendant son mouvement oscillatoire, nous pourrons déterminer leur travail et établir la relation qui les lie entre elles.

Le *travail moteur*, Tr_m, développé par la pesanteur pendant la demi-oscillation descendante, est égal au poids P du pendule multiplié par la projection de l'arc BA (fig. 10) sur la direction OA de la force, donc par la longueur A*b* (39). On écrira donc

$$Tr_m = P \times Ab.$$

Le *travail résistant*, c'est-à-dire le travail des forces qui agissent en sens contraire du mouvement, est composé de deux forces distinctes :

1° Du travail de la pesanteur développé pendant que le pendule parcourt la demi-oscillation ascendante, donc le

poids P multiplié par la projection de l'arc parcouru AB' sur la direction OA ; représentons ce travail par la formule

$$Tr_u = P \times Aa.$$

2° Des travaux résistants secondaires provenant des résistances de la suspension et de l'air. Connaissant les longueurs d'arc AB et AB', on trouve le travail des forces résistantes secondaires en multipliant le poids P du pendule par la différence des projections (*Ab*—A*a*) ou *ab* ; on aura donc

$$Tr_p = P \times ab.$$

Le travail moteur doit être égal à la somme des travaux résistants (49) ; on aura donc

$$Tr_m = Tr_u + Tr_p,$$

ou bien

$$P \times Ab = P \times Aa + P \times ab.$$

59. Pour que les oscillations du pendule conservent la même amplitude, il faut donc qu'à chacune de ses oscillations il reçoive une impulsion dont le travail soit égal à $P \times ab$.

60. Comme les travaux résistants secondaires augmentent avec l'amplitude des oscillations, il faut que l'impulsion, ou ce qu'on devrait appeler le travail de la force d'entretien, soit plus grande lorsqu'on veut faire parcourir de plus grands arcs au pendule.

On voit aussi que plus on diminue le frottement du couteau et la résistance de l'air, moins il faut de force d'entretien. On diminue la résistance de l'air en se servant d'une lentille de poids spécifique élevé ; car, pour un même poids, la section qui traverse l'air est plus petite. On peut aussi suspendre le pendule sous une cloche dont on raréfie l'air.

61. Pour entretenir les oscillations du pendule dans les horloges, on se sert le plus généralement des forces motrices produites par un poids, par un ressort tendu ou par un courant électrique. Les deux premières seront l'objet d'une étude détaillée au chapitre suivant.

Des oscillations du balancier et de leur rapport avec la force motrice.

62. Le mouvement du pendule ne peut être employé à la mesure du temps que dans les instruments qui doivent conserver une position fixe. Dans les pièces portatives, on se sert du mouvement oscillatoire d'un balancier annulaire monté sur un axe et muni d'un ressort spiral.

63. Ce spiral est une mince lame métallique, d'assez grande longueur et enroulée sur elle-même en forme de spirale d'Archimède, d'hélice cylindrique, sphérique ou conique. Dans tous les cas, une des extrémités de cette lame est attachée au balancier et l'autre à une pièce fixe quelconque de la montre.

Lorsqu'on ne place dans un mouvement de montre que le balancier muni de son spiral, il se trouve une position pour laquelle la force élastique du spiral n'exerce aucune action sur le balancier. Celui-ci est alors à l'état de repos.

Quand on écarte le balancier de cette position dans l'un ou l'autre sens, la force élastique du spiral tend à le ramener au repos, il se produit alors des oscillations analogues à celles du pendule.

Ce mouvement oscillatoire est très propre à mesurer le temps et a l'avantage de pouvoir être employé dans toutes les pièces portatives.

64. Soit A (fig. 11) le point de repos d'un balancier ; si l'on écarte ce dernier de cette position d'un angle AOB $= \alpha$ et que, depuis le point B, on le laisse libre en le livrant ainsi à la force élastique du spiral, cette force lui imprimera un mouvement de rota-

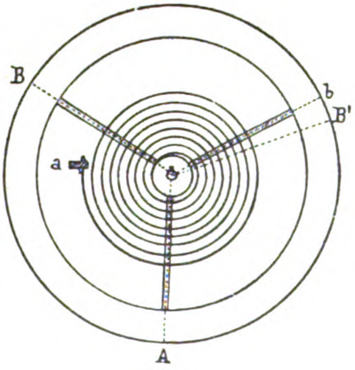


Fig. 11.

tion dont la vitesse augmentera jusqu'au point A. A partir de là, le spiral déploiera une force en sens contraire du mouvement et tendra à l'éteindre. S'il était possible de produire un tel mouvement sans qu'il y eût de résistances passives agissant sur le balancier, celui-ci parcourrait un nouvel angle $AOb = a$, puis reviendrait en B et ainsi de suite indéfiniment.

Il n'en est pas ainsi en réalité, car il y a plusieurs forces résistantes qui agissent sur le balancier et qui l'empêchent de parvenir jusqu'en b. Ces forces sont:

1° Le frottement des pivots du balancier;

2° La résistance de l'air;

3° Une perte de force résidant dans le spiral, perte dont la véritable cause n'est pas absolument définie, mais dont l'existence peut être parfaitement établie.

Ces forces résistantes secondaires ont pour effet de diminuer chaque oscillation d'une petite quantité, qui est représentée sur la figure par l'angle $B'Ob$. En appelant a' l'angle $B'OA$, on a

$$B'Ob = a - a'.$$

Si, comme nous l'avons fait pour les oscillations du pendule, nous désignons par Tr_m le travail moteur déployé par le spiral pendant que le balancier parcourt l'angle a, par Tr_u le travail résistant provenant du spiral pendant la deuxième partie de l'oscillation, donc pendant que le balancier parcourt l'angle a', et par Tr_p le travail résistant secondaire des forces passives, on devra obtenir l'égalité (49).

$$Tr_m = Tr_u + Tr_p$$

ou

$$Tr_p = Tr_m - Tr_u.$$

Le travail de la force d'entretien doit, tout aussi bien pour le balancier que pour le pendule, être égal au travail résistant secondaire, si l'amplitude des oscillations doit conserver sa grandeur initiale; autrement dit, le travail de la force d'entretien doit être égal au travail de la force du spiral pendant que le balancier parcourt l'angle $a - a'$.

65. On peut admettre que le travail résistant augmente avec l'amplitude des oscillations, comme nous l'avons fait voir pour le pendule, et conclure qu'il faut plus de travail moteur pour faire parcourir de grands arcs au balancier que pour de petits.

66. Comme force motrice dans les pièces portatives, on se sert exclusivement de la force élastique développée par un ressort renfermé dans l'intérieur d'un cylindre appelé le *barillet.* Cette pièce, dentée le plus souvent, tourne autour d'un axe et cette action est transportée jusqu'au balancier par des mécanismes spéciaux que nous allons rapidement passer en revue.

Du rouage, de son but dans le mécanisme des horloges et des montres.

67. La force motrice, n'agissant directement ni sur le pendule, ni sur le balancier, est d'abord transmise par un système de roues dentées ou train d'engrenages, qu'on appelle en langage technique le *rouage* ou la *transmission.* Cette force, ainsi transportée, est reçue par un mécanisme qui est l'*échappement;* c'est ce dernier qui a pour fonction de restituer à chaque oscillation du pendule ou du balancier la perte de force

$$Tr_m - Tr_u$$

occasionnée par les forces résistantes secondaires.

68. Lorsqu'on se sert du poids comme force motrice, ce poids est suspendu à l'extrémité d'une corde se déroulant d'un cylindre fixé concentriquement sur l'axe d'une roue dentée. Cette roue A (fig. 12) engrène dans une deuxième roue beaucoup plus petite que la première et qu'on nomme un *pignon*, sur lequel est fixée concentriquement une deuxième roue dentée B, laquelle engrène à son tour dans le pignon *b* et ainsi de suite jusqu'au dernier pignon, sur l'axe duquel est fixée la roue d'échappement. La même chose a lieu lorsque

la force motrice est celle d'un ressort de barillet. Dans ce cas le barillet engrène lui-même dans le premier pignon *a*.

69. Dans les montres, les différentes roues du rouage portent les noms suivants :

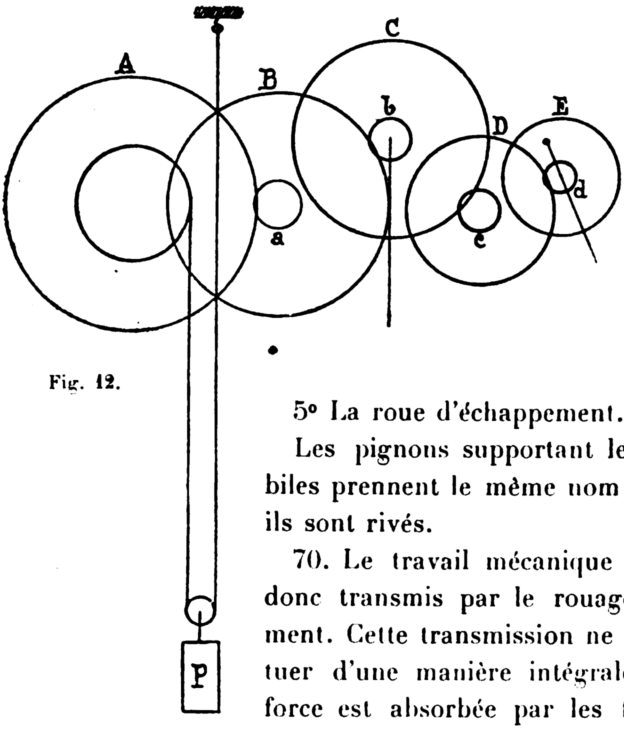


Fig. 12.

1° Le barillet.

2° La roue de centre (aussi appelée grande moyenne).

3° La roue moyenne (aussi appelée petite moyenne[1]).

4° La roue de secondes.

5° La roue d'échappement.

Les pignons supportant les quatre derniers mobiles prennent le même nom que la roue à laquelle ils sont rivés.

70. Le travail mécanique de la force motrice est donc transmis par le rouage à la roue d'échappement. Cette transmission ne peut cependant s'effectuer d'une manière intégrale, car une partie de la force est absorbée par les frottements des engrenages et des pivots, par l'inertie des mobiles et quelquefois aussi par des défauts résidant dans les engrenages.

71. A côté de la transmission de la force, le rouage doit remplir une autre fonction : c'est de compter le nombre d'oscillations que le pendule ou le balancier exécute pendant un temps déterminé et d'indiquer ce nombre au moyen d'aiguilles sur un cadran divisé. Il faut donc combiner le rapport des nombres de dents de roues aux nombres d'ailes des pignons, de façon à rendre cette indication conforme à la division du temps. Ainsi la roue du centre portant sur son axe l'aiguille des minutes devra accomplir une rotation pen-

[1] Les noms de grande et de petite moyennes sont actuellement vieillis.

dant une heure et la roue de secondes portant l'aiguille de secondes devra faire un tour par minute. (L'aiguille d'heures est portée par une roue faisant partie d'un rouage accessoire, duquel nous nous occuperons plus loin.)

Des échappements.

72. On construit diverses sortes d'échappements différant plus ou moins entre elles ; mais, quoi qu'il en soit, leur fonction consiste toujours à rendre au pendule ou au balancier la vitesse que lui font perdre les résistances passives. L'échappement le plus parfait sera celui qui effectuera ce travail en altérant le moins possible la durée des oscillations.

Comme le mouvement du balancier, ainsi que celui du pendule, est un mouvement oscillatoire, la roue d'échappement est arrêtée pendant une partie de l'oscillation; ce n'est que lorsque le balancier ou le pendule parcourt un arc déterminé que la roue devient libre et se met en mouvement. Pendant ce temps, elle agit soit directement sur le balancier, comme dans les échappements à « cylindre » ou à « détente », soit sur une pièce intermédiaire, comme dans les échappements à « ancre ». Après avoir parcouru l'angle déterminé d'impulsion, la roue est de nouveau arrêtée jusqu'à un prochain dégagement. La façon dont cet arrêt se produit, diffère selon le genre d'échappement.

73. Dans la généralité des échappements, l'action d'une même dent de la roue correspond à deux oscillations du balancier ou du pendule. Ainsi, dans une montre, le balancier exécute 30 oscillations pendant une rotation complète d'une roue de 15 dents ; dans une horloge, le pendule fait 60 oscillations pendant un tour d'une roue d'échappement de 30 dents.

* * *

74. En résumé, on peut diviser l'étude des fonctions des mécanismes d'horlogerie en quatre parties principales qui sont :

1° Organe moteur, étude des forces motrices.

2° Organes de la transmission, étude du rouage et des engrenages.

3° Organe récepteur, étude des échappements.

4° Organe régulateur, étude du réglage.

CHAPITRE II

FORCES D'ENTRETIEN OU FORCES MOTRICES

Le poids comme force motrice.

75. A titre d'*unités* dans les calculs, nous adopterons dès le début le *millimètre* comme unité de longueur, le *gramme* comme unité de poids et de force, ce qui donne pour unité de travail mécanique le *grammillimètre*. Comme unité de temps, nous choisirons la *seconde*.

76. Parmi toutes les forces dont on se sert en horlogerie pour entretenir les oscillations du pendule, le poids est à la fois la plus régulière, la plus simple à obtenir et celle dont l'intensité peut être réglée avec le plus de facilité.

77. Si l'on suspend un certain poids P (fig. 12) à l'extrémité d'une corde enroulée autour d'un cylindre dont le rayon augmenté de la demi-épaisseur de la corde est égal à r, le travail de cette force pendant que le cylindre exécute un tour, sera exprimé par (40) :

$$P \times 2 \pi r.$$

En divisant ce travail par le nombre N d'oscillations que le pendule exécute pendant un tour du cylindre, on obtiendra comme quotient le travail mécanique développé par le poids pendant une oscillation du pendule, soit :

$$Tr.\ P = \frac{P \times 2 \pi r}{N}.$$

Nous savons qu'il se perd une partie de ce travail mécanique pendant sa transmission jusqu'au pendule; appelons Tr_u ce travail perdu. On doit avoir l'égalité

$$Tr. P - Tr_u = Tr_p,$$

dans laquelle on remplacera $Tr. P$ par sa valeur, soit

$$\frac{P \times 2 \pi r}{N} - Tr_u = Tr_p.$$

On voit donc que la détermination du travail que reçoit le pendule à chaque oscillation (Tr_p), dépend aussi de la connaissance du travail perdu pendant sa transmission par le rouage de l'échappement. On comprend par conséquent la difficulté qu'il y a à déterminer le travail moteur, puisque ce travail ne dépend pas uniquement du poids et des dimensions du pendule, mais encore des résistances à vaincre pendant une oscillation.

Voici du reste deux calculs tirés de la pratique qui aideront à mieux fixer les idées sur ce sujet.

78. *Premier calcul.* — Le poids moteur d'un régulateur à secondes est de 2000 grammes; ce poids est suspendu à l'extrémité d'une corde qui se déroule d'un cylindre de 15 millimètres de rayon, quel sera le travail produit par ce poids pendant l'unité de temps?

Le travail mécanique effectué par le poids pendant que le cylindre exécute une révolution, sera

$$2000 \times 2 \pi \times 15 = 188\,496 \text{ gr.mm.}$$

Au cylindre est fixée une roue A (fig. 12) engrenant dans un pignon *a* qui porte sur son axe une deuxième roue B, laquelle vient à son tour engrener dans un pignon *b*. Ce dernier pignon portant sur son axe l'aiguille des minutes doit donc exécuter un tour par heure. Les nombres de dents et d'ailes de ces mobiles sont distribués de façon que le pignon *b* exécute 45 tours pendant que le cylindre en fait 1; en conséquence, une révolution du cylindre s'effectuera en 45 heures, ou en

$$45 \times 60 \times 60 = 162\,000 \text{ secondes} = N$$

Nous obtiendrons donc le travail produit par le poids pendant une oscillation du pendule en appliquant la formule :

$$Tr.\ P = \frac{P.\ 2\pi r}{N} = \frac{188\,496}{162\,000} = 1{,}163 \text{ gr.mm.}$$

Nous établirons les moyens de calculer le travail perdu pendant la transmission lorsque nous traiterons les questions des frottements, de l'inertie des roues, etc. ; pour le moment, supposons ces calculs faits et adoptons pour ce cas spécial la valeur

$$Tr_u = 0{,}413 \text{ gr.mm.}$$

On aura donc

$$Tr_m - Tr_u = Tr_p$$

ou

$$1{,}163 - 0{,}413 = 0{,}75 \text{ gr.mm.}$$

Le poids de 0,75 gramme, exerçant son action sur un chemin de 1 millimètre, est donc suffisant pour entretenir les oscillations d'un pendule dont le poids est d'environ 6500 grammes. L'amplitude des oscillations est de 2°6′.

79. Quoique ce qui suit sorte un peu du cadre du problème que nous nous étions posé, profitons cependant des données que nous possédons pour calculer encore la valeur de l'angle BOA — B′OA (fig. 19). Cette adjonction à la solution précédente ne manque du reste pas d'intérêt.

Suivant une équation établie précédemment (58), le travail de la force capable d'entretenir les oscillations d'un pendule était exprimé par

$$Tr_p = P \times ab.$$

On peut donc poser

$$P \times ab = 0{,}75 \text{ gr.mm.},$$

ou encore

$$ab = \frac{0{,}75}{6500} = 0{,}0001154.$$

La longueur du pendule simple battant la seconde est à peu près de 994 millimètres pour notre latitude. Supposons que tout le poids de notre pendule soit réuni autour d'un seul point, la distance du centre de gravité au centre de suspension sera alors égale à la longueur du pendule simple battant la seconde. On aura :

$$Ab = 994 - 994 \cos \mathrm{AOB}$$
$$Aa = 994 - 994 \cos \mathrm{AOB'}$$

D'après la figure 10, la différence Ab — Aa donne la longueur ab; en soustrayant donc les deux équations ci-dessus l'une de l'autre, on obtient :

$$ab = 994 \cos \mathrm{AOB'} - 994 \cos \mathrm{AOB}$$

ou

$$ab = 994 (\cos \mathrm{AOB'} - \cos \mathrm{AOB}).$$

Par suite,

$$\cos \mathrm{AOB'} - \cos \mathrm{AOB} = \frac{ab}{994} = \frac{0{,}0001154}{994}.$$

Comme l'angle AOB est égal dans ce cas à la moitié de 2°6′, soit 1°3′, on peut écrire, après avoir effectué le calcul du second membre de l'équation :

$$\cos \mathrm{AOB'} - \cos 1°3' = 0{,}000\,000\,116.$$

Pour déterminer la valeur de l'angle AOB — AOB′, on peut rechercher, dans une table de lignes trigonométriques naturelles, la différence entre les cosinus des angles de 1°2′ et 1°3′. Cette différence est de 0,0000053 ; on posera alors la proportion

$$\frac{0{,}0000053}{0{,}000000116} = \frac{60'}{x},$$

d'où

$$x = \frac{60 \times 116}{5300} = 1'',3\,;$$

donc

$$\mathrm{AOB} - \mathrm{AOB'} = 1''3.$$

80. *Deuxième calcul.* — Une horloge de la Forêt-Noire, comme celles qu'on fabriquait en grandes quantités dans les années 1810 à 1850, marche sous l'action d'un poids de 625 grammes. Ce poids descend en 24 heures d'une hauteur de 1250 millimètres. Quel est le travail produit par cette force pendant une seconde?

Le travail produit pendant la descente du poids sera de

$$\mathrm{T}r = 625 \times 1250$$

en vingt-quatre heures. Pendant une seconde, il sera

$$24 \times 60 \times 60 = 86\,400 \text{ fois moindre, donc}$$

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{m}} = \frac{625 \times 1250}{86400} = 9 \text{ gr.mm.}$$

On voit que cette horloge demande un travail mécanique beaucoup plus grand que celui du régulateur de l'exemple précédent. Cette différence devient encore plus sensible si l'on compare les deux pendules : le poids du pendule de la dernière horloge n'est que de 8 grammes, tandis que le pendule du régulateur pèse 6500 grammes.

Bien que nous ne puissions pas encore comparer deux horloges dont les pendules n'ont ni le même poids, ni la même longueur, ni la même amplitude d'oscillation, nous remarquons cependant que le régulateur demande beaucoup moins de force qu'une petite horloge de la Forêt-Noire.

Le ressort de barillet comme force motrice.

81. Ces ressorts sont de minces lames d'acier trempé et convenablement revenu ; elles sont d'assez grande longueur et enroulées en forme de spirale dans l'intérieur du barillet. Une de leurs extrémités est accrochée à la paroi du *tambour* et l'autre à la *bonde*, qui est une pièce cylindrique ajustée sur l'arbre du barillet ou faisant corps avec lui.

Lorsque l'on maintient fixe soit l'arbre de barillet, soit le barillet et que l'on fasse tourner celle de ces deux pièces laissée libre, le ressort vient s'enrouler autour de la bonde et déploie par ses extrémités une certaine force qui tend à la ramener à sa forme primitive. Lorsque l'arbre est rendu fixe, la force déployée par le ressort a donc pour effet de faire tourner le barillet.

82. La place occupée par le ressort dans l'intérieur du barillet doit être égale à la moitié de l'espace disponible.

83. **Mesure de la force du ressort.** — La force développée par le ressort est susceptible d'être mesurée. Pour cet effet, ajustons sur l'arbre du barillet un levier gradué le long duquel on peut glisser un poids déterminé. En tenant le barillet en main, armons le ressort jusqu'au point que l'on désire étudier, d'un tour par exemple ; cherchons ensuite à produire l'équilibre en glissant le poids le long du levier. Lorsque les

deux actions, celle du poids d'un côté et du ressort de l'autre se détruisent, l'équilibre est produit et il est alors évident que l'effort déployé par le ressort est égal à l'effet produit par le poids. Ce dernier effet sera parfaitement déterminé lorsqu'on connaîtra la grandeur du poids et la longueur du bras du levier à l'extrémité duquel il exerce son action.

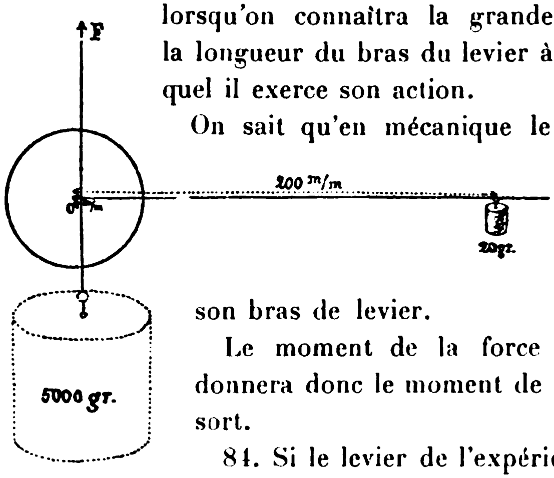


Fig. 13.

On sait qu'en mécanique le *moment* d'une force (15) est le produit de l'intensité de cette force par son bras de levier.

Le moment de la force du poids nous donnera donc le moment de la force du ressort.

84. Si le levier de l'expérience précédente n'a pas son centre de gravité sur l'axe, il faut encore tenir compte de l'effet produit par le poids de ce levier qui, pratiquement, ne peut être réduit à une simple ligne géométrique. Il faut pour cela déterminer la distance du centre de gravité du levier à l'axe et multiplier cette valeur par le poids du levier. On ajoute alors ce produit au moment de force obtenu précédemment.

Supposons, par exemple, qu'un poids de 20 grammes suspendu à l'extrémité d'un bras de levier de 200 millimètres fasse équilibre à la force élastique d'un ressort de barillet. Le produit,

$$20 \times 200 = 4000,$$

représente le moment de la force exercée par le poids.

Si, en outre, le poids du levier est de 7 grammes et la distance de son centre de gravité au centre de l'arbre de 143 millimètres, le moment de la force exercée par le levier sera

$$7 \times 143 = 1001.$$

En ajoutant cette valeur au moment de la force du poids,

on obtient le moment de la force du ressort, que nous désignerons par F, donc

$$F = 4000 + 1000 = 5000 \text{ grammes}$$

en chiffre rond. C'est la valeur approximative du moment de la force du ressort d'une montre de 43 millimètres (19 lignes).

Remarquons que le plus généralement ces leviers sont munis de contre-poids combinés de façon que le centre de gravité se trouve sur l'axe.

85. Le nombre 5000 que nous venons d'établir, signifie que le ressort considéré est capable de faire équilibre à un poids de 5000 grammes suspendu à l'extrémité d'un bras de levier égal à l'unité de longueur, soit 1 millimètre (fig. 13).

86. En examinant de cette manière la force d'un ressort, on constatera qu'elle varie beaucoup suivant le nombre de tours dont il est armé. L'expérience prouve en effet que le moment de la force d'un ressort étant, en son point maximum de tension, de 5000 grammes, par exemple, ce moment diminue constamment et ne sera plus que de 3400 grammes environ lorsque le barillet aura exécuté quatre rotations autour de son axe.

87. On comprend donc qu'étant donnée l'imperfection des montres primitives, les anciens horlogers aient recherché le moyen de corriger l'inégalité de l'action du ressort moteur et qu'à cet effet ils aient imaginé l'ingénieuse disposition de la *fusée*, dont il sera question plus loin.

Ce correctif est actuellement à peu près abandonné et n'est plus guère conservé que dans les chronomètres de marine; dans les montres de poche, il est devenu inutile à mesure que les perfectionnements apportés à la construction des échappements sont entrés dans l'usage et que l'isochronisme des oscillations du balancier a pu être obtenu.

Recherche théorique du mouvement de la force d'un ressort.

88. **Coefficient d'élasticité.** — Lorsqu'un corps reçoit un effort extérieur, les molécules qui le composent, tendent à suivre la direction de cette force : elles se rapprochent ou s'éloignent les unes des autres. Il en résulte une force égale et contraire qui tend à faire reprendre aux molécules déplacées leur position primitive.

Cette propriété, commune à tous les corps à des degrés différents, se nomme leur *élasticité*.

Suivant l'effort exercé, les molécules se rapprochent ou s'éloignent les unes des autres : le premier cas est un effet de compression ou de contraction, le second un effet de traction.

89. La réaction est toujours égale à l'action ; on peut donc évaluer la force élastique des corps par la mesure de l'effort extérieur qui leur est appliqué. L'expérience suivante fera comprendre cette assertion.

90. Fixons par l'une de ses extrémités une tige quelconque verticale, à l'autre extrémité de laquelle on suspend un poids (fig. 14). Cette tige acquiert dès lors un certain allongement et on peut constater que l'effort moléculaire développé est égal au poids produisant l'allongement. L'allongement pris par cette tige dépendra de la grandeur de la force P, de la longueur de la pièce dans son état naturel, de la section droite de cette pièce supposée la même partout et enfin de la matière dont elle est composée.

En expérimentant sur une tige de caoutchouc, on peut voir que, sous l'action d'une force P, la section transversale du corps diminue en même temps que l'allongement se produit. Cette diminution régulière sur la presque totalité de la longueur de la tige n'a pas également lieu vers les deux points d'encastrement. C'est pourquoi il convient de prendre les éléments de l'expérience suffisamment éloignés de ces

points, afin d'éliminer une cause d'erreur qui influencerait le résultat définitif.

Prenons encore comme exemple une tige de fer dont la section transversale est de 1 millimètre carré. On a mesuré la distance comprise entre deux points de repère suffisamment éloignés des points d'encastrement : soit L cette longueur. On suspend à l'extrémité inférieure de la tige un poids P et on mesure à nouveau la longueur comprise entre les deux repères : on constate alors un allongement l. Les expériences faites de cette façon ont démontré que, pourvu que la charge P ne dépasse pas une certaine limite, l reste proportionnel à la charge.

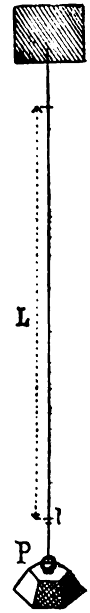


Fig. 14.

En supposant maintenant que l'expérience fût physiquement possible, déterminons quelle devrait être la charge P pouvant produire un allongement égal à la longueur primitive L. On appelle cette valeur particulière de P le *coefficient d'élasticité* du corps ; nous la désignerons par la lettre E.

L'allongement étant proportionnel à la charge, on peut poser

$$\frac{P}{l} = \frac{E}{L},$$

d'où l'on tire

$$E = \frac{PL}{l}.$$

Ainsi, dans le cas d'une tige de fer de longueur primitive L égale à 1000 millimètres, si l'on suspend une charge P de 1000 grammes, on constatera un allongement de 0,05 millimètres, ce qui donne

$$E = \frac{1000 \times 1000}{0,05} = 20\,000\,000 \text{ gr.}$$

comme coefficient d'élasticité du fer.

91. L'allongement l est inversement proportionnel à la section transversale du corps ; ainsi, pour une section de surface s, la formule ci-dessus deviendra

$$E = \frac{PL}{sl}.$$

92. Lorsque le coefficient d'élasticité est connu, il est facile de déterminer la valeur de la force exercée par les molécules d'un corps soumis à l'action d'une force extérieure par la relation

$$P = \frac{Els}{L}.$$

Le rapport $\frac{l}{L}$ représente l'allongement par unité de longueur; ce rapport doit rester très petit pour que cette formule soit exacte. Les quantités E, *s*, L, sont constantes; P *l* sont variables ensemble.

La même formule exprime la relation qui lie une force P de compression au raccourcissement *l* qui résulte de l'action de cette force, quand la pièce comprimée ne fléchit pas latéralement. On attribuera donc à P et à *l* les signes + et —, + pour les forces de traction et les allongements, — pour les forces de compression et les raccourcissements; la formule devient alors générale.

93. **Variation du coefficient d'élasticité.** — Tous les horlogers savent qu'après avoir forgé une pièce de laiton, la force élastique du métal est augmentée. En martelant ce corps, on diminue son volume, mais on ne peut changer son poids; les molécules qui composent la pièce, se sont resserrées et le poids spécifique du métal aura augmenté. Ce simple fait nous fait voir que le coefficient d'élasticité des corps solides doit varier en même temps que leur poids spécifique.

Lorsqu'une montre (non compensée), réglée à une certaine température, est exposée à une température plus élevée, elle retarde de 10 secondes environ par 24 heures et par degré centigrade. Le spiral s'est dilaté par l'effet de l'augmentation de température, ses molécules se sont éloignées les unes des autres, le poids spécifique du métal a diminué en même temps que son coefficient d'élasticité. L'inverse se produit

lorsque la montre est observée à une température moins élevée que celle à laquelle elle a été réglée.

Il ne semble pas que le coefficient d'élasticité de l'acier subisse une grande variation par l'effet de la trempe et celui du recuit. Une pièce d'acier ne change en effet que peu ou pas ses dimensions par la trempe. On a constaté qu'à la trempe dans l'eau une pièce d'acier s'allonge des $^3/_{1000}$ environ de sa longueur primitive, mais que cet allongement se perd lorsqu'on recuit la pièce jusqu'à la couleur bleue. Le poids spécifique de l'acier ne s'étant pas modifié, le coeffi-

Valeurs du coefficient d'élasticité E.

Corps		Ecroui	Recuit
Acier		19549	19561
Acier anglais		18809	17278
Aciers du Creusot	très doux	20705	—
	mi-doux	20911	—
	dur	20599	—
Argent		7358	7146
Bronze : 90 cuivre, 10 étain	ordinaire	7589	—
	phosphoreux	8250	—
	Laveissière	9061	—
Cuivre		12449	10519
Fer du Berry		20972	20794
Laiton	32 zinc, 68 cuivre	9395	9277
Maillechort	18 zinc, 60 cuivre, 22 nickel	10788	—
Or		8132	5585
Palladium		11759	9789
Platine		17044	15518
Platine iridié	10 iridium, 90 platine	—	21426
Verre à glaces		—	6722
Zinc		8735	9292

cient d'élasticité conserve la même valeur que celle qu'il possédait avant la trempe.

94. Nous donnons ci-contre un tableau des coefficients d'élasticité de quelques corps employés en horlogerie. Les chiffres ci-dessus sont extraits de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Remarques. — Les valeurs ci-dessus sont exprimées en kilogrammes; nous les réduirons toujours en grammes lorsque nous introduirons le coefficient d'élasticité dans nos calculs. Le coefficient d'élasticité des aciers surfins employés en horlogerie est généralement supérieur à la valeur donnée dans le tableau ci-dessus; l'expérience nous a conduit à admettre sa valeur moyenne comme étant de 23000 (donc 23000000 grammes).

95. **Limite d'élasticité.** — Si l'on soumet une tige quelconque à l'action de diverses charges, on remarque que, tant que la charge ne dépasse pas une certaine limite, proportionnelle à la section transversale du corps, la tige reprend sa longueur primitive après l'enlèvement du poids. En augmentant l'effort de manière à dépasser cette limite, l'allongement ne s'efface que partiellement ou même ne s'efface plus du tout. Cette limite est appelée la « limite d'élasticité parfaite » du corps considéré. Si l'on continue à augmenter le poids, l'allongement devient de plus en plus apparent et enfin la « rupture » se produit.

La limite d'élasticité parfaite est très peu élevée pour certains métaux, tels que le plomb, le cuivre rouge, l'aluminium, etc. Le fer même ne possède pas une très grande limite; par contre l'acier, lorsqu'il est trempé, augmente sa limite d'élasticité par un recuit convenable. Ce recuit, connu sous le nom de « trempe des ressorts », correspond à la couleur bleu-clair.

Il serait d'une très grande utilité pour l'horlogerie de connaître la valeur exacte de cette limite d'élasticité parfaite de l'acier trempé et recuit; ces expériences n'ont pas encore été souvent mises à l'étude et les données nous manquent ac-

tuellement; aussi, pour le présent, nous en tiendrons-nous aux résultats que la pratique de l'horlogerie nous fournit.

96. **Moment de la force élastique d'un ressort soumis à une flexion.** — Soit A_0B_0 un ressort de forme circulaire, de section rectangulaire, d'épaisseur e et de hauteur h. Imaginons que cette lame de ressort soit partagée, dans le sens de sa longueur, en un certain nombre de fibres dont l'une particulièrement, située au milieu du corps, est appelée *fibre neutre*, pour la raison qu'elle ne change pas de longueur lorsque le ressort subit une flexion.

Lorsque cette lame est fléchie de façon que le rayon de la fibre neutre diminue (fig. 15), les fibres intérieures à celle-ci subissent un raccourcissement, tandis que les fibres extérieures s'allongent.

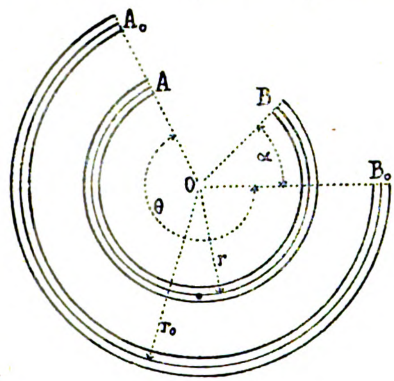


Fig. 15.

Soit $\pm\ v$ la distance d'une fibre quelconque à la fibre neutre: $+\ v$ si la fibre est à l'extérieur et $-\ v$ si elle est à l'intérieur de la fibre neutre. Si r_0 représente le rayon de la fibre neutre dans la position non déformée et θ l'angle que forment entre eux les deux rayons aboutissant aux extrémités A_0 et B_0, on aura alors la longueur L_0 de la fibre neutre par l'équation

$$L_0 = r_0\ \theta$$

et la longueur L_0' d'une fibre quelconque dont le rayon est $r_0 + v$, sera

$$L_0' = (r_0 + v)\ \theta.$$

Si maintenant l'une des extrémités de la lame est rendue fixe et que l'on fasse fléchir l'autre en lui faisant parcourir un angle $\pm\ \alpha$, le rayon de la fibre neutre diminuera si α est positif, c'est-à-dire s'il s'ajoute à l'angle θ. Si au con-

traire l'extrémité B_0 est fléchie en sens opposé, l'angle θ devient plus petit et on a dans ce cas α négatif : le rayon de la fibre neutre augmentera.

La longueur L_0 de cette fibre n'a pas changé par la flexion ; on aura donc dans cette nouvelle position, r étant le rayon de la fibre déformée,

$$L_0 = r\,(\theta + \alpha).$$

On peut donc poser

$$r_0\,\theta = r\,(\theta + \alpha),$$

d'où

$$r = \frac{r_0\,\theta}{\theta + \alpha}.$$

La fibre quelconque de longueur L'_0 est devenue

$$L' = (r + v)\,(\theta + \alpha)\,;$$

en remplaçant r par la valeur ci-dessus, on aura

$$L' = \left(\frac{r_0\,\theta}{\theta + \alpha} + v\right)(\theta + \alpha),$$

et en effectuant :

$$L' = r_0\,\theta + v\theta + v\alpha.$$

L'allongement l de la fibre considérée s'obtiendra par la différence des longueurs L' et L'_0, donc

$$L' - L'_0 = l = r_0\theta + v\theta + v\alpha - r_0\theta - v\theta,$$

et, en simplifiant,

$$(1) \qquad l = v\alpha.$$

Cet allongement est positif, mais il deviendra négatif pour v négatif, c'est-à-dire pour les fibres intérieures ; il y aura alors raccourcissement. Il y aura de même raccourcissement si v est positif et α négatif. Si ces deux valeurs sont négatives, leur produit est positif et l'on a un allongement.

Remarquons que l'allongement l est indépendant du rayon r_0 de la fibre neutre et que par conséquent la forme du ressort peut être quelconque.

97. Déterminons maintenant le moment de la force exercée par deux fibres opposées, situées à égale distance $+ v$

et — v de la fibre neutre, et supposons que la flexion de la lame ait été effectuée en conservant le centre O au ressort déformé, c'est-à-dire que la lame ait pris la position AB (fig. 15).

La fibre extérieure, qui a été allongée par la flexion, tendra à reprendre sa première longueur et agira avec une force P, dont la valeur est représentée par (92)

$$P = \frac{Els}{L},$$

formule dans laquelle nous pouvons remplacer l par son équivalent va (96), ce qui donne

$$(2) \qquad P = \frac{Evas}{L}.$$

La fibre intérieure tend à s'allonger et exercera ce même effort en sens inverse, donc

$$-P = -\frac{Evas}{L}.$$

Le moment MP de l'effort simultané produit par l'action de ces deux fibres sera égal à la somme des produits de chacune des deux forces par leur bras de levier respectif $r + v$ et $r - v$. Donc

$$MP = P(r + v) - P(r - v)$$

ou

$$(3) \qquad MP = 2\,Pv.$$

Cette valeur est donc indépendante du rayon de courbure du ressort, c'est-à-dire de la distance du point d'attache extérieur de la lame au centre du barillet.

En remplaçant dans l'équation (3) P par sa valeur (2), on aura

$$(4) \qquad MP = 2\,\frac{Easv^2}{L}.$$

Envisageons maintenant la section s des fibres considérées. La section droite du ressort étant imaginée rectangulaire, de hauteur h et d'épaisseur e, nous aurons, en supposant d'abord la lame partagée en un nombre fini de fibres, 10 par exemple, la section d'une de ces fibres :

$$s = 0{,}1\ e \times h,$$

puisque l'épaisseur d'une fibre sera dans ce cas la dixième partie de l'épaisseur totale du ressort.

Admettons, ce qui n'est pas absolument exact, que chaque fibre séparée agisse par sa partie médiane, c'est-à-dire que la distance v du milieu de la fibre la plus rapprochée de la fibre neutre soit $0{,}05\ e$ (fig. 16); la distance du milieu de la seconde sera $0{,}15\ e$, celle de la troisième $0{,}25\ e$, pour la quatrième $0{,}35\ e$ et enfin pour la cinquième $0{,}45\ e$. Comme, dans l'équation (4), le terme v est à la deuxième puissance, nous devons élever chacune des cinq valeurs précédentes au carré et en faire la somme.

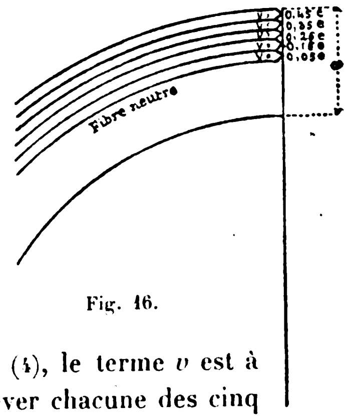


Fig. 16.

On aura donc:

1re fibre:	$v = 0{,}05\ e.$	$v^2 = 0{,}05^2\ e^2$	$= 0{,}0025\ e^2$
2me fibre:	$v = 0{,}15\ e.$	$v^2 = 0{,}15^2\ e^2$	$= 0{,}0225\ e^2$
3me fibre:	$v = 0{,}25\ e.$	$v^2 = 0{,}25^2\ e^2$	$= 0{,}0625\ e^2$
4me fibre:	$v = 0{,}35\ e.$	$v^2 = 0{,}35^2\ e^2$	$= 0{,}1225\ e^2$
5me fibre:	$v = 0{,}45\ e.$	$v^2 = 0{,}45^2\ e^2$	$= 0{,}2025\ e^2$
		Somme de v^2	$= 0{,}4125\ e^2$

Remplaçant maintenant les valeurs déterminées de s et de v^2 dans l'équation (4), on aura :

$$\text{Somme : } MP = 2\,\frac{E\,a.\ 0{,}1\ eh.\ 0{,}4125\ e^2}{L}.$$

Cette formule représente le moment de la force de l'ensemble des 10 fibres considérées, donc du ressort total, tandis que la formule (4) donnait la valeur du moment de deux seules fibres, l'une intérieure et l'autre extérieure à la fibre neutre. Désignant par F la somme précédente, on aura en effectuant :

$$(5)\qquad F = \frac{0{,}0825\ E\,e^3\ h\ a}{L}.$$

Nous avons obtenu le coefficient 0,0825 en partageant la lame du ressort en 10 fibres; si nous l'avions supposée partagée en un plus grand nombre de fibres, nous serions arrivé à une valeur très approchée de 0,08333, soit $^1/_{12}$. On aurait donc dans ce cas

$$(6) \qquad F = \frac{E\, e^3\, h\, \alpha}{12\, L}.$$

98. Nous ne sommes arrivé à cette dernière forme, qui est la forme exacte, que par approximation.

Le calcul intégral nous fournit un moyen d'effectuer l'addition ci-dessus avec une exactitude absolue et pour une infinité de fibres[1].

Reprenons l'équation (4)

$$MP = 2\,\frac{E\,\alpha\, s\, v^2}{L}.$$

Désignant l'épaisseur infiniment petite d'une fibre par dv, nous aurons pour la section s :

$$s = dv.h;$$

en remplaçant,

$$d.MP = 2\,\frac{E\alpha h}{L}\, v^2\, dv,$$

ou

$$\int d.MP = 2\,\frac{E\alpha h}{L}\int v^2\, dv. + C.$$

Nous poserons

$$\int d.MP = F$$

et nous aurons :

$$F = 2\,\frac{E h \alpha}{L}\int v^2\, dv = {}^2/_3\,\frac{E\,\alpha\, h}{L}\, v^3 + C.$$

Remplaçant v par $^1/_2\, e$, c'est-à-dire prenant l'intégrale entre les limites $v = {}^1/_2\, e$ et $v = o$, nous obtiendrons enfin

$$(6) \qquad F = \frac{1}{12}\,\frac{E\, h\, e^3}{L}\,\alpha.$$

99. Dans la formule précédente, α est l'angle dont on a fait tourner l'extrémité libre du ressort depuis la position où

[1] Nous donnons ci-dessous cette deuxième manière de calculer le moment de la force d'un ressort. Ce calcul, comme du reste tout ce qui dans ce cours est imprimé en caractères fins, peut être laissé de côté à une première lecture par les personnes peu accoutumées au calcul infinitésimal.

l'effort élastique est nul jusqu'au point que l'on veut étudier. Ainsi, lorsqu'on a fait tourner l'extrémité libre du ressort d'un tour, le nombre primitif de tours aura augmenté de 1, etc. On peut donc évaluer l'angle α en comptant le nombre de tours dont le ressort est enroulé à l'instant considéré et en n'omettant pas de déduire de ce chiffre le nombre de tours que compte le ressort en le posant librement sur une table. Soit n cette différence, on aura

$$\alpha = 2 \pi n;$$

on peut donc écrire la formule (6)

$$(7) \qquad F = \frac{E h e^3 2 \pi n}{12 L}.$$

100. En calculant le moment de la force d'un ressort de barillet au moyen de cette équation et en comparant ensuite le résultat obtenu à celui que donne l'expérience (84), on arrive généralement à une petite différence. Cette différence provient essentiellement des causes suivantes:

1° Nous avons déjà mentionné que la valeur du coefficient d'élasticité du ressort dont on s'occupe, pouvait être sensiblement différente de celle que l'on a admise dans le calcul.

2° Il est difficile de mesurer exactement l'épaisseur du ressort: une faible erreur donnera une différence considérable au résultat. Ainsi, pour un ressort de $0{,}18^{mm}$, $^1/_{100}$ de millimètre d'erreur influencera d'un sixième le résultat.

3° La section transversale de la lame est rarement un rectangle parfait; souvent le ressort est extérieurement concave et intérieurement convexe.

4° Le calcul suppose le ressort parfaitement libre, tandis qu'il se produit des effets compliqués lorsqu'il se trouve enfermé dans l'intérieur du barillet. Lorsqu'on l'enroule autour de la bonde, il n'y a qu'une certaine longueur de la lame qui se détache des tours appuyés contre le tambour du barillet. Le moment de la force devrait donc être calculé suivant la longueur de la lame détachée.

5° Lorsque le ressort est enroulé jusqu'à un certain point,

les lames dont il se compose, s'éloignent de la forme circulaire, se jettent de côté et il se produit par là une décomposition de force dont l'une des composantes est dirigée vers le centre du barillet et se traduit en frottement. Nous pouvons ajouter un défaut analogue se produisant au centre et qui, en se combinant avec le défaut extérieur, peut diminuer ou, en certains cas, augmenter le moment de la force du ressort.

6° Il se produit un frottement considérable entre les lames du ressort, frottement augmenté encore par l'effet de l'adhérence produite par l'huile dont on est obligé de faire usage.

101. *Exemple de calcul numérique de la formule* (7). — Les dimensions du ressort modèle d'une montre de 43mm (19 lignes) étant les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Epaisseur} &= e = 0{,}18^{\text{mm}} \\ \text{Hauteur} &= h = 3{,}6^{\text{mm}} \\ \text{Longueur} &= \text{L} = 650^{\text{mm}}, \end{aligned}$$

soit à calculer le moment de la force de ce ressort.

Lorsque l'effort élastique de ce ressort est nul, c'est-à-dire lorsque celui-ci est placé librement sur une table, il fait 5 tours. Enroulé dans l'intérieur du barillet et s'appuyant contre le tambour, il en fait 14. Le développement de ce ressort étant de 6 tours dans le barillet, on donne un demi-tour de sûreté et nous aurons, d'après ce qui a été dit,

$$n = 14 + 5{,}5 - 5 = 14{,}5 \text{ tours},$$

lorsque la montre est complètement remontée.

Prenons le coefficient d'élasticité E = 23000000.

La formule (7) peut s'écrire aussi

$$\text{F} = \frac{\text{E}\, h\, e^3\, \pi\, n}{6\ \text{L}};$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a

$$\text{F} = \frac{23000000 \times 3{,}6 \times 0{,}18^3 \times 3{,}1416 \times 14{,}5}{6 \times 650}.$$

En effectuant les calculs ci-dessus, on arrive à

$$F = 5640 \text{ gr.}$$

pour $n = 14,5$ tours.

Le moyen le plus simple pour effectuer ce calcul est l'emploi des logarithmes. Nous donnons ci-après la disposition d'une telle opération :

log. E = log. 23000000 = 7,3617278.	
+ log. e^3 = log. $0,18^3$ = 0,7658175 — 3.	
+ log. h = log. 3,6 = 0,5563025.	log. L = log. 650 = 2,8129134.
+ log. π = log. 3,1416 = 0,4971499.	+ log. 6 = 0,7781513.
log. numérateur = 6,1809977.	log. dénominat. = 3,5910647.

log. numérateur = 6,1809977.
— log. dénominateur = 3,5910647.
2,5899330 = log. 388,985.
+ log. n = log. 14,5 = 1,1613680.
3,7513010 = log. 5640.

Le calcul précédent montre que le moment de la force du ressort est de 388,985 gr. pour un nombre $n = 1$. Pour $n = 14,5$, il est de 5640 gr. Lorsque par suite de la marche de la montre, le barillet a fait un tour, n aura diminué d'une unité et n'aura plus pour valeur que 13,5; le moment de la force du ressort aura diminué de 388,985 gr. ou, en forçant les unités, de 389 gr. Nous pourrons donc former le tableau suivant :

F, pour $n = 14,5 = 5640$, le ressort est entièrement enroulé
F_1, pour $n = 13,5 = 5251$, le barillet a exécuté un tour.
F_2, pour $n = 12,5 = 4862$, le barillet a exécuté deux tours.
F_3, pour $n = 11,5 = 4473$, le barillet a exécuté trois tours.
F_4, pour $n = 10,5 = 4084$, le barillet a exécuté quatre tours.

102. **Inégalité de la force élastique du ressort.** — Le moment F de la force d'un ressort est donc plus grand lorsque la montre est complètement remontée que lorsqu'elle va s'arrêter. Ce fait nous a été déjà démontré (86) par l'expérience.

Il convient de renfermer cette inégalité de la force motrice dans les limites les plus étroites possibles. Remarquons à cet

effet que, dans le calcul numérique de la formule (7), nous avons remplacé successivement n par $n - 1$, par $n - 2$, $n - 3$, et $n - 4$; dans ce dernier cas, la montre est à l'instant où elle va s'arrêter, si le barillet est muni d'un arrêtage. Or, le rapport entre n et $n - 4$ étant plus grand lorsque n est plus petit, il sera convenable, pour diminuer l'inégalité de la force, de donner au nombre de tours n du ressort une valeur aussi grande que possible. La démonstration suivante fera mieux comprendre cette idée.

103. Comme on peut employer des ressorts produisant le même moment initial de force F_0, mais dont les dimensions et le nombre n de tours sont différents, on comprend que F_4 puisse varier dans certains cas beaucoup moins que dans d'autres.

Supposons par exemple, deux ressorts produisant, étant remontés, le même moment de force $F_0 = 4000$: le premier ayant un nombre de tours $n = 10$, le second un nombre $n = 20$. Pour le premier, nous aurons dans la formule (7) la valeur

$$\frac{1}{12} \frac{E e^3 h \, 2 \pi}{L} = 400,$$

et pour le second cette même valeur sera

$$\frac{1}{12} \frac{E e^3 h \, 2 \pi}{L} = 200.$$

Lorsque les deux barillets auront exécuté une révolution, le nombre de tours du premier sera $n_1 = 9$ et celui du second $n_1 = 19$. On aura donc successivement :

Premier cas.	Deuxième cas.
$F_0 = 400 \times 10 = 4000$	$F_0 = 200 \times 20 = 4000$
$F_1 = 400 \times 9 = 3600$	$F_1 = 200 \times 19 = 3800$
$F_2 = 400 \times 8 = 3200$	$F_2 = 200 \times 18 = 3600$
$F_3 = 400 \times 7 = 2800$	$F_3 = 200 \times 17 = 3400$
$F_4 = 400 \times 6 = 2400$	$F_4 = 200 \times 16 = 3200$

Il est ainsi facile de voir que le moment de la force diminue dans le premier cas beaucoup plus rapidement que dans le

second et que la force du second ressort s'approche beaucoup plus d'une valeur constante que celle du premier.

Il convient donc de donner au nombre de tours n la plus grande valeur possible.

Pour un ressort donné, ce nombre ne peut cependant être supérieur à une certaine valeur déterminée par la limite d'élasticité parfaite de l'acier, qui ne peut être dépassée sans que le ressort se rende ou se casse.

Cette limite dépend de l'allongement par unité de longueur $\frac{l}{L}$ de la fibre extérieure. Nous avions (96)

$$l = va,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{l}{L} = \frac{va}{L}.$$

Dans l'exemple numérique précédent, nous avions les valeurs suivantes :

$$v = \frac{1}{2} e = 0{,}09. \quad a = 2 \pi n = 14{,}5 \times 2 \pi. \quad L = 650 \text{ mm}.$$

On aura donc

$$\frac{l}{L} = \frac{0{,}09 \times 14{,}5 \times 2 \pi}{650};$$

et en effectuant les calculs :

$$\frac{l}{L} = 0{,}012614 \text{ mm}.$$

On peut admettre cette valeur de $\frac{l}{L}$ comme limite offrant une sécurité suffisante et consacrée par la pratique.

101. Il ne faut pas oublier cependant que la nature de l'acier, la manière dont les ressorts sont fabriqués, trempés et recuits, peuvent modifier sensiblement cette limite.

Les ressorts sont trempés et recuits en forme de cercles d'environ 100^{mm} de rayon ; ils sont ensuite « estrapadés » et, par cette opération, les fibres subissent un allongement très inégal, puisque, de la forme d'abord circulaire, ils passent à une forme spiraloïde dont les tours intérieurs ont un rayon

de courbure beaucoup plus petit que les tours extérieurs. Il résulte de cette opération que les fibres extérieures sont plus allongées aux tours intérieurs qu'aux tours extérieurs. C'est pour cette raison que les ressorts se cassent plus facilement à la spire intérieure qu'aux tours extérieurs.

105. La forme qu'un ressort possède en sortant des mains du fabricant est très variable, et on pourrait difficilement la représenter par une équation générale. Cette forme primitive ne se conserve pas lorsque la montre a marché un certain temps; le ressort se « rend » d'abord un peu, puis finit par prendre une forme qu'il conserve ensuite d'une manière permanente. C'est cette dernière forme qui devrait être prise comme point de départ pour déterminer l'angle $2\pi n$ donnant le degré de flexion dans la formule (7). Partant de cette position, on peut admettre que l'allongement par unité de longueur $\frac{l}{L}$ est sensiblement le même sur toute la longueur du ressort.

106. **Longueur du ressort.** — Comme on ne peut pas développer un ressort, pour mesurer sa longueur, sans en modifier la structure intérieure, il est commode d'avoir à sa disposition une formule simple permettant de calculer la valeur L.

En supposant le ressort enroulé dans l'intérieur du barillet, nous admettons que le rayon aboutissant aux spires intérieures soit égal à $^2/_3$ R dans la position de repos du ressort, R étant le rayon intérieur du tambour du barillet. Nous pouvons, sans grande erreur, substituer des circonférences aux spires et obtenir la longueur du ressort en multipliant le rayon moyen

$$\frac{R + {}^2/_3\, R}{2} = {}^5/_6\, R$$

par $2\ \pi\ N'$, N' désignant le nombre de tours d'enroulement du ressort lorsqu'il est appuyé contre la paroi du barillet. A cette valeur il faut ajouter la longueur de l'extrémité du ressort qui se détache des spires pour s'accrocher à la bonde, soit à peu près

$$2\,\pi \times \frac{R}{2} = \pi\,R.$$

Nous aurons donc la longueur

$$L = 2\,\pi\,R\left({}^{5}/_{6}\;N' + \frac{1}{2}\right).$$

On a, par exemple, pour le calcul de la longueur du ressort d'une montre de 43^{mm}, les valeurs suivantes :

$$R = 8{,}8 \text{ mm. et } N' = 13 \text{ tours;}$$

en remplaçant, nous aurons

$$L = 2 \times 3{,}1416 \times 8{,}8\left({}^{5}/_{6} \times 13 + \frac{1}{2}\right),$$

d'où

$$L = 626 \text{ millimètres.}$$

Développement d'un ressort.

107. Lorsque le ressort d'une montre est introduit dans l'intérieur du barillet, il est enroulé sur lui-même en formant un certain nombre de tours dont le plus extérieur s'appuie contre la paroi du tambour et les suivants les uns contre les autres ; il affecte sensiblement la forme d'une spirale d'Archimède de pas égal à l'épaisseur du ressort. L'extrémité intérieure de la lame se détache brusquement des spires et vient s'accrocher à la bonde.

Pour « remonter » le ressort, on peut maintenir fixe le barillet et faire tourner l'arbre de plusieurs tours jusqu'à ce que le ressort soit entièrement enroulé autour de la bonde, à l'exception de son extrémité extérieure qui reste accrochée à la paroi du tambour.

Il est évident que le nombre N de révolutions que l'arbre a pu accomplir, est égal à la différence des nombres de tours que compte le ressort dans ces deux positions extrêmes.

Soient :

N' le nombre de tours que fait le ressort lorsqu'il est appuyé contre le tambour du barillet.

N″ son nombre de tours lorsqu'il est enroulé autour de la bonde.

On aura donc

$$N = N'' - N'.$$

Pour simplifier les calculs, négligeons les extrémités intérieure et extérieure de la lame se détachant des spires et admettons que l'espace occupé par le ressort dans les deux positions soit un volume cylindrique.

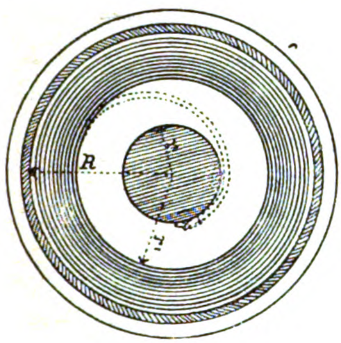


Fig. 17.

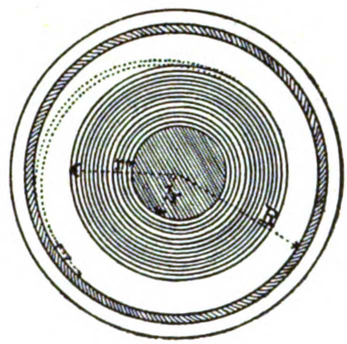


Fig. 18.

Désignons encore par

R le rayon intérieur du barillet,

r le rayon de la bonde,

r' le rayon aboutissant au tour intérieur du ressort lorsqu'il est appuyé contre le tambour du barillet (fig. 17),

r'' le rayon aboutissant au tour extérieur du ressort lorsqu'il est enroulé autour de la bonde (fig. 18),

e l'épaisseur du ressort.

On peut écrire :

$$N'' = \frac{r'' - r}{e} \quad \text{et} \quad N' = \frac{R - r'}{e},$$

et par suite

$$(1) \qquad N = N'' - N' = \frac{r'' - r}{e} - \frac{R - r'}{e}$$

On peut trouver la valeur de r'' en fonction de R, r' et r, en remarquant que les surfaces occupées par le ressort dans les deux positions sont équivalentes.

Lorsqu'il est appuyé contre le tambour du barillet, cette surface est :

$$S = \pi\,(R^2 - r'^2)$$

et lorsqu'il est enroulé autour de la bonde :

$$S = \pi\,(r''^2 - r^2).$$

Donc

$$r''^2 - r^2 = R^2 - r'^2,$$

d'où

$$r'' = \sqrt{R^2 - r'^2 + r^2}.$$

En substituant cette valeur de r'' dans l'équation (1), on a

$$(2) \qquad N = \frac{1}{e}\left(\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2} - r - R + r'\right).$$

108. Remarquons que, lorsqu'on tire la valeur de e de l'équation

$$N' = \frac{R - r'}{e},$$

on arrive à une différence avec la valeur directe qui est toujours plus faible. Cette différence provient du fait que, par suite de certaines inégalités du ressort, les tours de la lame ne se superposent pas rigoureusement les uns sur les autres.

109. *Maximum de N en fonction de r'.* — L'équation (2) indique que, pour un barillet dont le rayon intérieur R, le rayon de la bonde r et l'épaisseur du ressort e sont déterminés, le nombre de tours de développement N varie avec le rayon r' aboutissant à la première spire intérieure du ressort dans sa position de repos. Ce dernier rayon r' dépend de la longueur de la lame.

Appliquons en premier lieu cette formule à un exemple numérique et admettons les données suivantes :

Rayon intérieur du barillet . . .	$R = 3$
Rayon de la bonde	$r = 1$
Fraction $\frac{1}{e}$	$= 13$

L'équation (2) deviendra, en remplaçant les quantités connues par leurs valeurs :

$$N = 13\,(\sqrt{9 + 1 - r'^2} - 1 - 3 + r')$$

ou

$$N = 13\left(\sqrt{10 - r'^2} - 4 + r'\right).$$

La plus petite valeur que puisse atteindre le rayon r', est

$$r' = r = 1,$$

et sa plus grande valeur peut être

$$r' = R = 3.$$

Dans le premier cas, le ressort a un nombre de tours suffisant pour remplir complètement le vide entre la paroi du barillet et la bonde, et dans le second, ce nombre de tours est nul. Le raisonnement indique que dans ces deux cas extrêmes le développement du ressort doit être nul, ce que fait voir aussi l'application de la formule (2).

En remplaçant successivement dans cette même formule r' par 1,1, 1,2, 1,3, etc., jusqu'à 2,9, on pourra former le tableau suivant :

r'	N	r'	N	r'	N
1	0	1,7	4,76	2,4	5,96
1,1	0,84	1,8	5,2	2,5	5,67
1,2	1,63	1,9	5,56	2,6	5,2
1,3	2,37	2	5,84	2,7	4,5
1,4	3,06	2,1	6,03	2,8	3,5
1,5	3,69	2,2	6,13	2,9	2,09
1,6	4,26	2,3	6,11	3	0

On voit que le nombre maximum de tours de développement du ressort est donné par un rayon r' égal à environ 2,2.

En pratique, on a adopté comme valeur de r' les deux tiers de R, pour la raison que l'égalité de la force du haut en bas augmente avec la longueur du ressort (103).

110. Le calcul des maxima permet de déterminer la valeur exacte du maximum de N en fonction de r'.

Reprenons l'équation (2) :

$$N = \frac{1}{e}\left(\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2} - r - R + r'\right),$$

dans laquelle les deux variables sont N et r'. Différencions cette équation en posant

$$R^2 - r'^2 + r^2 = z,$$

on aura

$$dz = 2r'\,dr'$$

et

$$dN = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\,z^{-\frac{1}{2}}\,dz + dr'\right).$$

Remplaçant z et dz par leur valeur, il vient

$$dN = \frac{1}{e}\left(\frac{-\,r'\,dr'}{\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2}} + dr'\right)$$

ou

$$\frac{dN}{dr'} = \frac{1}{e}\left(-\frac{r'}{\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2}} + 1\right);$$

égalons cette dérivée à zéro :

$$\frac{1}{e}\left(-\frac{r'}{\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2}} + 1\right) = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{r'}{\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2}} = 1$$

et

$$r' = \pm\sqrt{R^2 - r'^2 + r^2}.$$

Elevant au carré, on a

$$r'^2 = R^2 - r'^2 + r^2$$

et

(3) $$r' = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

Substituons cette valeur de r' dans l'équation

$$r'' = \sqrt{R^2 - r'^2 + r^2},$$

on aura

$$r'' = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 + r^2}{2} + r^2} = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

On voit donc que le maximum de N a lieu lorsqu'on a

(4) $$r' = r'' = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

Comme on a l'habitude, en pratique, de faire le rayon de la bonde égal au tiers du rayon intérieur du barillet, on peut poser

$$R = 3 \text{ et } r = 1$$

et on aura

$$r' = r'' = \sqrt{\frac{9+1}{2}} = \sqrt{5} = 2{,}236.$$

111. Pour représenter graphiquement l'équation (2), rapportons-la à deux axes coordonnés rectangulaires (fig. 19)

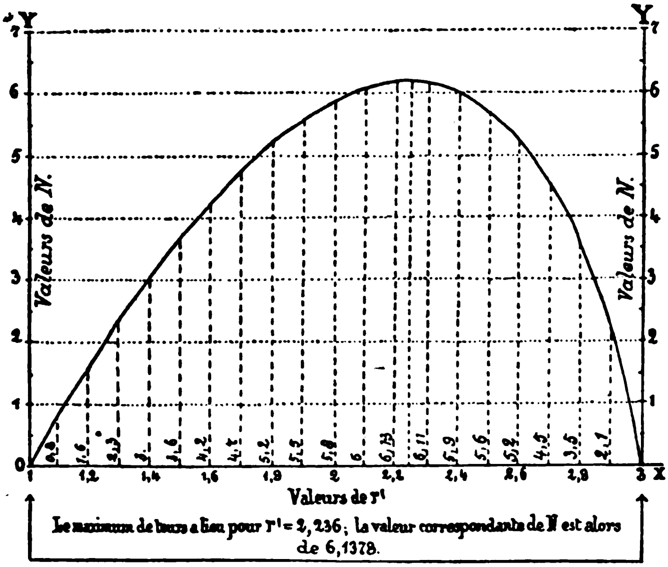


Fig. 19.

et portons sur l'axe des abscisses les valeurs de r' et sur l'axe des ordonnées les valeurs correspondantes de N. Joignons les points ainsi obtenus par une courbe.

On voit qu'en faisant le vide du barillet égal à la partie occupée par le ressort on n'obtient pas le maximum de tours de développement du ressort.

112. Si l'on partage l'intérieur d'un barillet en donnant

$^1/_3$ R à la partie occupée par le ressort,

$^1/_3$ R au vide,

$^1/_3$ R au rayon de la bonde,

on a

$$N = \frac{1}{e}\left(\sqrt{3^2 - 2^2 + 1} - 1 - 3 + 2\right)$$

et

$$N = \frac{1}{e}\left(\sqrt{6} - 2\right) = \frac{1}{e}\left(2,44 - 2\right) = \frac{1}{e} \times 0,44\text{*}.$$

En conséquence si

$$\frac{1}{e} = 13, \text{ on aura } N = 5,7 \text{ tours,}$$

$$\frac{1}{e} = 14, \text{ on aura } N = 6,1 \text{ tours,}$$

$$\frac{1}{e} = 15, \text{ on aura } N = 6,6 \text{ tours.}$$

113. **Diamètre de la bonde.** — L'usage de faire le rayon de la bonde égal au tiers du rayon intérieur du barillet a été admis par une longue pratique. Lorsqu'on laisse la bonde plus grande que cette valeur, on n'obtient pas un nombre suffisant de tours de développement du ressort et, lorsqu'on la fait plus petite, le ressort est sujet à se rompre ou, s'il est trop recuit, à se rendre.

Il se présente cependant des cas où, dans un barillet donné, on désire introduire un ressort plus mince que celui que l'on a coutume d'employer et on peut alors se demander si l'on ne pourrait pas réduire le diamètre de la bonde, afin d'obtenir un plus grand développement du ressort. Examinons donc cette question.

On sait que, lorsqu'on soumet à une traction une tige d'acier de section transversale égale à 1 millimètre carré, cette tige s'allonge et que, lorsque la charge qui produit cet allongement, atteint une certaine valeur, la rupture se produit. Or, des expériences faites avec du fil de spiraux ont démontré que le fil se rompt si le poids atteint une valeur de 135 kilogrammes.

* Il convient de ne pas forcer le chiffre de la racine carrée de 6, car, à cause de la partie intérieure du ressort se rattachant à la bonde, on perd plutôt un peu de développement.

Remarquons que le fil qui a servi à cette expérience, n'était pas trempé.

Recherchons d'abord l'allongement l par unité de longueur qu'a subi la tige à l'instant précédant immédiatement la rupture. On a (90)

$$P = \frac{El}{L}.$$

En prenant E = 23 000 000, P = 135 000 gr. L = 1, on posera

$$l = \frac{135\,000}{23\,000\,000} = \frac{135}{23\,000},$$

d'où

$$l = 0{,}0058695 \text{ mm}.$$

D'un autre côté, calculons l'allongement de la fibre extérieure d'un ressort de barillet tel qu'il est admis en pratique et comparons les deux résultats. A cet effet, prenons le ressort d'une montre de 43 mm. (19 lignes) ayant fourni la preuve de pouvoir supporter la flexion désirée.

Nous aurons l'allongement par unité de longueur par la formule (96)

$$l = \frac{va}{L}.$$

L'épaisseur de ce ressort est $0^{mm}18$, par conséquent

$$v = 0^{mm}09.$$

Dans l'intérieur du barillet et appuyé contre le tambour, ce ressort avait 13 tours et 5 en dehors du barillet. En outre, étant remonté, il était armé de 5,5 tours. Avec ces indications nous trouvons :

$$a = (13 - 5 + 5{,}5) \times 2\,\pi = 27\,\pi.$$

La longueur du ressort est de 600 mm.; on aura par conséquent

$$l = \frac{0{,}09 \times 27 \times 3{,}1416}{600} = 0{,}01272.$$

En comparant les chiffres ci-dessus,

Allongement par la traction, $l = 0{,}0058695$,

Allongement par la flexion, $l = 0{,}01272$,

on peut constater ce résultat étonnant que les fibres extérieures d'un ressort peuvent supporter un allongement par unité de longueur double de celui que produit la rupture par la traction.

Ce fait ne peut s'expliquer par la supposition d'une qualité d'acier supérieure à celle du métal composant la tige qui s'est rompue sous l'action d'un poids de 135 kg.; car ce dernier acier était certainement de première qualité. Il faut donc admettre que la fibre extérieure d'un ressort ne se rompt pas, lorsque l'allongement qu'elle acquiert est égal à celui que produit la rupture par la traction, pour la raison qu'elle est retenue par les fibres intérieures.

En présence de ce fait, on peut admettre, comme limite d'allongement que peut supporter sans se rompre la fibre extérieure d'un ressort, la valeur

$$l = 0^{mm}012.$$

On reste dans cette limite en faisant le diamètre de la bonde égal au tiers du diamètre intérieur du barillet et en employant un ressort faisant 13 tours dans le tiers du rayon intérieur de ce même barillet.

Lorsqu'on désire se servir d'un ressort plus ou moins épais, il faut dans ce cas déterminer le diamètre de la bonde par rapport à l'épaisseur choisie. Ainsi, le diamètre intérieur du barillet qui nous a servi à l'expérience précédente ayant $17^{mm}1$, le diamètre de la bonde avait donc

$$\frac{17,1}{3} = 5^{mm}8\,;$$

en divisant ce diamètre par l'épaisseur du ressort 0,18, on arrive à la conclusion que le diamètre de la bonde doit être

32 fois l'épaisseur du ressort, en chiffre rond.

Si le diamètre de la bonde est inférieur à cette proportion, le ressort risque de se rompre ou, s'il est trop revenu, de se rendre.

Travail produit par un ressort.

114. On détermine le travail mécanique que produit un ressort à chaque oscillation du balancier en divisant le travail que déploie ce ressort, pendant un tour de barillet, par le nombre d'oscillations qu'accomplit le balancier pendant ce même temps.

Soit F = 4800 le moment de la force du ressort d'une montre dont le balancier exécute 18 000 oscillations par heure; nous obtiendrons le travail mécanique effectué par le ressort pendant un tour du barillet par le produit

$$Tr = 4800 \times 2\,\pi.$$

Si le barillet de 80 dents engrène dans un pignon de centre de 10 ailes, le nombre d'oscillations correspondantes sera

$$\frac{80}{10} \times 18000;$$

le travail mécanique pendant une oscillation sera donc

$$Tr_m = \frac{4800 \times 2\,\pi}{\frac{80}{10} \times 18000} = 0{,}2094 \text{ gr. mm.}$$

Si, par contre, la montre ne battait que 16 200 oscillations par heure, on aurait dans ce cas

$$Tr_m = \frac{4800 \times 2\,\pi}{\frac{80}{10} \times 16200} = 0{,}2327 \text{ gr. mm.}$$

On voit donc qu'on augmente le travail de la force reçue par le balancier à chaque oscillation en diminuant le nombre de ces oscillations.

Admettons encore que le balancier exécute 18000 oscilla-

tions, mais que le pignon de centre ait 12 ailes au lieu de 10, on aurait alors :

$$Tr_m = \frac{4800 \times 2\pi}{\frac{80}{12} \times 18000} = 0{,}251\,328 \text{ gr. mm.}$$

On augmente par conséquent aussi le travail de la force en diminuant la durée d'une révolution du barillet.

De la fusée.

115. Nous savons que la loi de la variation d'action d'un ressort qui se déroule, est complexe et que la force développée a des limites très écartées pour un ressort de même épaisseur dans toute son étendue.

Pour remédier à ce défaut, on imagina autrefois l'ingénieux dispositif de la *fusée*, consistant en un solide de révolution de section à peu près parabolique et dont la surface est entaillée d'une courbe hélicoïdale. Cette pièce est montée sur l'axe d'une roue dentée A (fig. 20) engrenant avec le pignon de grande moyenne. Les dents du barillet sont dans ce cas supprimées et son arbre demeure constamment fixe. Cette disposition permet d'égaliser complètement l'action motrice du ressort. En effet, lorsqu'on vient de remonter la montre, le ressort est complètement tendu; une chaîne d'acier, dont l'une des extrémités est accrochée à la fusée et l'autre au barillet, est à ce moment presque complètement enroulée sur les spires de la fusée. En se détendant, le ressort fait tourner le barillet, qui communique son mouvement à la fusée par l'intermédiaire de la chaîne. Celle-ci se déroule

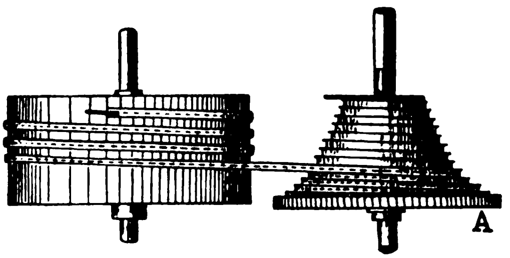


Fig. 20.

peu à peu de la fusée et s'enroule autour du barillet jusqu'à ce qu'il ne reste plus de tours sur la fusée. Il est évident que, si la tension du ressort va sans cesse en diminuant, cette action agit par contre à une distance de l'axe de la fusée toujours plus grande. Le travail moteur, produit de la tension par le chemin parcouru, donne, en désignant par P la tension, par r la distance à l'axe et par w la vitesse de rotation,

$$Prw.$$

Ce travail pourra être constant pour une même vitesse de la roue fixée sur l'axe de la fusée, c'est-à-dire pour une vitesse angulaire uniforme, si la fusée est entaillée de telle façon que le produit Pr reste constant. Il faut donc que les variations de P soient inverses de celles de r. Il y aurait cependant une réserve à faire sur ce qui précède, si l'on tient compte du frottement des pivots dans les platines; ce frottement, en effet, va sans cesse en diminuant, à mesure que la pression diminue. Nous négligerons cependant ce facteur, pour ne pas compliquer la théorie suivante.

116. Pour vérifier pratiquement si la variation de force d'un ressort est exactement contrebalancée par la forme de la fusée, on se sert d'un levier et d'un poids, comme nous l'avons déjà vu précédemment (83); on fixe le levier sur le carré de l'arbre de la fusée; la forme de cette pièce sera exacte si le poids porté par le levier fait équilibre à la force du ressort à la même distance de l'axe et en chaque point des rotations successives de la fusée.

117. **Calculs du rayon variable des spires de la fusée.** — Soient :

R le rayon extérieur du barillet, y compris la demi-épaisseur de la chaîne;

r le rayon variable de la fusée;

r_0 son rayon initial (dans r et r_0 est également comprise la demi-épaisseur de la chaîne);

θ l'angle maximum dont le ressort est armé à partir de la position où l'effort élastique est nul et correspondant

à l'instant où la chaîne agit à l'extrémité du rayon r_0;
α l'angle dont le barillet a tourné à partir de la position θ;
β l'angle dont la fusée a tourné à partir de l'instant où la chaîne agit à l'extrémité du rayon r_0.

Le moment de la force du ressort peut être exprimé par

$$F = \frac{\frac{1}{12} E e^3 h}{L} (\theta - \alpha).$$

Posons

$$\frac{\frac{1}{12} E e^3 h}{L} = M,$$

on aura

$$F = M (\theta - \alpha)$$

La force F′ agissant à l'extérieur du barillet doit être

$$F' = \frac{M}{R} (\theta - \alpha),$$

et le moment F_1 par rapport à l'axe de la fusée est

$$F_1 = \frac{Mr}{R} (\theta - \alpha).$$

Les valeurs de r et de α doivent varier de façon que, pour que F_1 soit constant, nous ayons α égal à zéro pour r égal à r_0; on aura donc

$$\frac{Mr_0}{R} \theta = \frac{Mr}{R} (\theta - \alpha),$$

d'où

(1) $$r = \frac{r_0 \theta}{\theta - \alpha}.$$

Lorsque la chaîne s'enroule d'une quantité infiniment petite $Rd\alpha$ sur le barillet, elle se déroule d'une même longueur $rd\beta$ de la fusée. On a donc

$$Rd\alpha = rd\beta,$$

ou, à cause de l'équation (1),

$$d\beta = \frac{R}{r_0 \theta} (\theta - \alpha) d\alpha.$$

En intégrant, il vient :

$$\beta = \frac{R}{r_0\,\theta}\int(\theta - \alpha)\,d\alpha = \frac{R}{r_0\,\theta}\left(\int \theta d\alpha - \int \alpha d\alpha\right).$$

Ces intégrales devant être prises entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha'$, on aura

$$\int \theta d\alpha = \theta\alpha \quad \text{et} \quad \int \alpha d\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha^2;$$

par conséquent,

$$\beta = \frac{R}{r_0\,\theta}\,(\theta\alpha - \frac{1}{2}\,\alpha^2).$$

Tirons de cette équation la valeur de α, on aura d'abord

$$-\frac{1}{2}\,\alpha^2 + \theta\alpha = \frac{r_0\,\theta}{R}\,\beta;$$

changeant les signes, ajoutant θ^2 à chaque membre et multipliant par 2, il vient

$$\alpha^2 - 2\,\theta\alpha + \theta^2 = -\frac{2\,r_0\,\theta}{R}\,\beta + \theta^2$$

et

$$\alpha - \theta = \pm\sqrt{-\frac{2\,r_0\theta}{R}\,\beta + \theta^2};$$

par conséquent,

$$\alpha = \theta \pm \theta\sqrt{1 - \frac{2\,r_0}{R\,\theta}\,\beta}.$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (1) α par cette valeur, nous obtiendrons :

$$r = \frac{r_0\,\theta}{\theta - \theta \pm \theta\sqrt{1 - \frac{2\,r_0}{R\,\theta}\,\beta}},$$

ou

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{2\,r_0}{R\,\theta}\,\beta}}.$$

Posons

$$\theta = 2\,\pi\,n \text{ et } \beta = 2\,\pi\,n',$$

on aura enfin

$$(2) \qquad r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{2\,r_0}{R}\,\frac{n'}{n}}}$$

118. **Calcul numérique de l'équation précédente.** — Soient :

$$R = 8 \text{ mm}, \; r_0 = 5 \text{ mm}, \; \theta = 12 \times 2\,\pi$$

et calculons d'abord la valeur du rayon r pour un angle $\beta = 2\,\pi$; on écrira, en remplaçant :

$$r' = \frac{5}{\sqrt{1 - \frac{2 \times 5}{8 \times 12}}} = \frac{5}{\sqrt{1 - \frac{10}{96}}};$$

le calcul donne :

$$\text{Log} : 86 = 1{,}9314985 \qquad\qquad \text{Log} : 5 = 0{,}6989700$$

$$-\text{log} : 96 = \underline{1{,}9822712} \qquad\qquad -\text{log} : \sqrt{\frac{86}{96}} = \underline{0{,}9761136}$$

$$1{,}9522273 - 2 \qquad\qquad \text{log} : r' = 0{,}7228564$$

$$\text{log} : \sqrt{\frac{86}{96}} = 0{,}9761136 - 1 \qquad\qquad \text{et } r' = 5{,}2827 \text{ mm}.$$

Des calculs successifs nous donneraient d'une manière analogue les résultats suivants, que nous groupons en tableau :

Pour	$\beta = 2\,\pi$,	$r^{I} = 5{,}2827$.
»	$\beta = 4\,\pi$,	$r^{II} = 5{,}6195$.
»	$\beta = 6\,\pi$,	$r^{III} = 6{,}0302$.
»	$\beta = 8\,\pi$,	$r^{IV} = 6{,}5491$.
»	$\beta = 10\,\pi$,	$r^{V} = 7{,}2231$. etc.

119. **Autre calcul.** — Il arrive le plus souvent, en pratique, que l'on ait comme donnée le plus grand rayon de la fusée et qu'il s'agisse de déterminer le rayon variable à partir de cette valeur. Ce problème, inverse du précédent, se résout d'une manière analogue. En conservant les mêmes notations que dans le cas précédent, soient dans ce cas

r_0 le plus grand rayon de la fusée et

θ l'angle dont le ressort est armé à l'instant où la chaîne agit à l'extrémité du rayon r_0 de la fusée.

Nous avons le moment de la force du ressort :

$$F_0 = M\,\theta,$$

et dans la position initiale, lorsque le barillet a tourné d'un angle α :

$$F = M\,(\theta + \alpha),$$

La force F′ agissant à l'extérieur du barillet sera pour les deux cas :

$$F_0{}' = \frac{M}{R}\,\theta \qquad \text{et} \qquad F' = \frac{M}{R}\,(\theta + \alpha),$$

et le moment de ces forces par rapport à l'axe de la fusée sera :

$$F_0{}'' = \frac{Mr_0}{R}\,\theta \qquad \text{et} \qquad F'' = \frac{Mr}{R}\,(\theta + \alpha).$$

Egalant ces deux dernières valeurs, on a

$$\frac{Mr_0}{R}\,\theta = \frac{Mr}{R}\,(\theta + \alpha),$$

ou

$$r_0\,\theta = r\,(\theta + \alpha),$$

d'où l'on tire

(1) $$r = \frac{r_0\,\theta}{\theta + \alpha}.$$

Comme dans le cas précédent, nous posons

$$rd\beta = Rd\alpha,$$

d'où

$$d\beta = \frac{R}{r}\,d\alpha.$$

En remplaçant r par sa valeur (1), on obtient

$$d\beta = \frac{R}{r_0\,\theta}\,(\theta + \alpha)\,d\alpha,$$

et, en intégrant,

$$\beta = \frac{R}{r_0\,\theta}\left(\int \theta\,d\alpha + \int \alpha\,d\alpha\right),$$

d'où

$$\beta = \frac{R}{r_0\,\theta}\left(\theta\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha^2\right).$$

Des transformations analogues au cas précédent nous donneront successivement :

$$\frac{1}{2}\alpha^2 + \theta\alpha = \frac{r_0\theta}{R}\beta;$$

$$\alpha^2 + 2\theta\alpha + \theta^2 = 2\frac{r_0\theta}{R}\beta + \theta^2;$$

$$\alpha + \theta = \sqrt{2\frac{r_0\theta}{R}\beta + \theta^2};$$

$$\alpha = -\theta \pm \sqrt{2\frac{r_0\theta}{R}\beta + \theta^2};$$

$$\alpha = -\theta \pm \theta\sqrt{\frac{2r_0}{R\theta}\beta + 1}.$$

La valeur de α, tirée de l'équation (1), est égale à

$$\alpha = \frac{r_0}{r}\theta - \theta,$$

par conséquent,

$$\frac{r_0}{r}\theta - \theta = -\theta \pm \theta\sqrt{\frac{2r_0}{R\theta}\beta + 1},$$

et

$$\frac{r_0}{r}\theta = \pm\theta\sqrt{\frac{2r_0}{R\theta} + 1},$$

d'où

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{\frac{2r_0\beta}{R\theta} + 1}},$$

ou encore, en posant :

$$\beta = 2\pi n' \text{ et } \theta = 2\pi n,$$

(2) $$r = \frac{r_0}{\sqrt{\frac{2r_0}{R}\frac{n'}{n} + 1}}.$$

120. **Calcul numérique de l'équation précédente.** — Comme exemple d'application du calcul précédent, déterminons les

dimensions de la fusée d'un chronomètre de marine et soient comme données :

Rayon extérieur du barillet, y compris la demi-épaisseur de la chaîne . . . . $R = 21{,}7^{mm}$

Rayon maximum de la fusée . . . . . . $r_0 = 18{,}3^{mm}$

Développement du ressort . . . . $n = 3{,}4$ tours.

Admettons que, lorsque le ressort est armé d'un tour, la chaîne agisse sur un angle $\beta = 0$, dans ce cas donc

$$n' = 0.$$

Lorsque la fusée a fait un tour, nous aurons $n' = 1$ et, en remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule (2), on aura :

$$r = \frac{18{,}3}{\sqrt{\dfrac{2 \times 18{,}3 \times 1}{21{,}7 \times 3{,}4} + 1}}.$$

Le calcul donne :

Log : (2 × 18,3) = log : 36,6 = 1,5634811
— log : (21,7 × 3,4) . . . . = 1,8679386
0,6955425 — 1
Nombre correspondant . . . = 0,4961

Log : 21,7 = 1,3364597.
+ log : 3,4 = 0,5314789.
1,8679386.

$$\text{Log} : \sqrt{0{,}4961 + 1} = \frac{\text{log} : 1{,}4961}{2}$$

Log : 1,4961 = 0,1749606
log : $\sqrt{1{,}4961}$ = 0,0874803

Log : 18,3 = 1,2624511.
— 0,0874803.
1,1749708.
Nombre = 14,961.

On aura donc le rayon de la fusée pour un nombre de tours $n' = 1$:

$$r_1 = 14^{mm}961.$$

En remplaçant successivement, dans la formule précédente, n' par 2, 3, 4, etc., on arriverait aux résultats suivants :

Pour $n' = 0$, $r_0 = 18{,}3$
Pour $n' = 1$, $r_1 = 14{,}961$
Pour $n' = 2$, $r_2 = 12{,}965$
Pour $n' = 3$, $r_3 = 11{,}601$
Pour $n' = 4$, $r_4 = 10{,}593$
Pour $n' = 5$, $r_5 = 9{,}809$
Pour $n' = 6$, $r_6 = 9{,}177$
Pour $n' = 7$, $r_7 = 8{,}653$
Pour $n' = 8$, $r_8 = 8{,}21$.

121. **Egalité de la force du ressort dans les montres à fusée.** — Pour obtenir l'égalité parfaite de la force du ressort dans les montres à fusée, il ne suffit pas uniquement de construire la fusée d'une manière conforme aux données des calculs précédents. Il y a d'autres facteurs qui entrent en ligne de compte et sur lesquels nous donnerons quelques éclaircissements.

Pour vérifier l'égalité de la force du ressort par rapport à la fusée ou, en langage pratique, pour *égaliser* la fusée, on introduit entre les deux platines de la montre la fusée et le barillet, on place la chaîne, on arme le ressort et on fixe sur l'arbre de la fusée le levier que nous avons mentionné (116).

En gardant le mouvement de la montre en main, on fait alors tourner le levier d'un quart de tour et on produit l'équilibre au moyen du poids; puis on fait tourner le levier de 1, 2, 3, etc. tours, en ayant soin d'examiner si à chaque révolution l'équilibre se maintient.

Or, la pratique enseigne que si, dans cette opération, on constate une *augmentation* de force, on s'approche de l'égalité parfaite en *armant* davantage le ressort de barillet; si, au contraire, l'instrument accuse une *diminution* de force, on *désarme* le ressort.

Lorsqu'on est arrivé à l'égalité de la force, on conserve la position initiale de tension du ressort en marquant un point sur le pivot de l'arbre de barillet et en répétant ce point sur

la platine de la montre, vis-à-vis de la position que le premier occupe.

Remarquons qu'il est nécessaire de renouveler cette opération chaque fois que l'on remplace le ressort expérimenté par un ressort neuf.

122. Recherchons maintenant l'explication de l'effet qui s'est produit dans les expériences précédentes. Admettons que les rayons des spires de la fusée aient été calculés pour un ressort qui, remonté, est armé de 10 tours et se développe de 3 tours jusqu'à l'instant où la chaîne est complètement déroulée de la fusée.

Le moment de la force du ressort complètement remonté est donc proportionnel à . . . . 10.

Lorsque le barillet a fait 1 tour, ce moment est proportionnel à. . . . . 9.

Lorsque le barillet a fait 2 tours, ce moment est proportionnel à. . . . . 8.

Lorsque le barillet a fait 3 tours, ce moment est proportionnel à. . . . . 7.

Du haut en bas, le moment de la force a diminué de $^3/_{10}$ $= 0,3$, et, pour que l'équilibre se produise, il faut donc que le rayon des spires de la fusée ait augmenté dans la même proportion.

Si, par contre, le ressort n'était armé que de 9 tours, la chaîne étant enroulée sur la fusée, nous aurions dans ce cas:

Ressort compl. tendu, moment de force proportionnel à				9.
Le barillet a fait 1 tour,	»	»	»	8.
Le barillet a fait 2 tours,	»	»	»	7.
Le barillet a fait 3 tours,	»	»	»	6.

Le moment de la force a donc diminué de $^3/_9 = ^1/_3$ $= 0,333....$ Cette diminution est supérieure à celle du premier cas, la même fusée ne produira pas l'équilibre et on voit ainsi qu'il faudra, pour avoir l'équilibre, armer le ressort d'un tour de plus.

123. Nous possédons de cette manière un moyen de régler pratiquement le moment de la force du ressort par rapport

à l'axe de la fusée en tenant compte de certains facteurs qui n'ont pas été introduits dans les calculs précédents; le principal de ces facteurs est le frottement.

Il est évident qu'en armant davantage le ressort on augmente son énergie; ce n'est cependant que dans des cas rares qu'il résultera un inconvénient de cette augmentation de force.

124. En établissant la théorie du ressort du barillet, nous avons admis ces ressorts de même épaisseur d'une extrémité à l'autre, qu'en outre leurs lames enroulées demeurent toujours concentriques, c'est-à-dire conservent une forme spiraloïde pendant leur développement, et qu'enfin elles sont constamment libres.

La pratique montre que ces conditions ne sont pas remplies par le ressort enfermé dans un barillet et qu'elles ne peuvent l'être que pour un ressort libre, tel que le ressort spiral.

Examinons rapidement encore ces trois faits, en commençant par le dernier énoncé.

125. La liberté complète des lames du ressort n'existe pas pratiquement. Supposons, en effet, que l'on ait fait tourner l'arbre de barillet d'un petit angle, d'un quart de tour, par exemple. Dans cette position, tous les tours du ressort ne sont point encore entrés en jeu: il s'en trouve un certain nombre qui restent appuyés les uns contre les autres en faisant corps avec le barillet. On devrait donc prendre la longueur agissante du ressort, L, égale à la longueur du ressort qui est devenu libre, et le nombre n égal au nombre de tours que compte cette partie libre à l'instant considéré, en diminuant cette valeur du nombre de tours que possède cette même longueur lorsqu'elle est posée librement sur une table (99).

Ainsi (fig. 21), si a est l'extrémité du ressort accrochée à la bonde et b le point où la partie libre des lames se détache de celle qui reste appuyée contre le tambour du barillet, la longueur L, dans l'équation (99)

$$F = \frac{E\, h\, e^3\, 2\, \pi\, n}{12\, L},$$

est donc seulement égale à la longueur de la partie *ab* du ressort. En outre, le nombre *n* sera égal au nombre de tours que compte cette partie de lame, diminué du nombre de tours que compte cette même longueur dans la position libre du ressort (fig. 22). Par exemple, nous avons (fig. 21) $ab = 2\ ^3/_4$ tours et (fig. 22) $ab = 2\ ^1/_2$ tours; par conséquent, $n = 2\ ^3/_4 - 2\ ^1/_2 = {}^1/_4$.

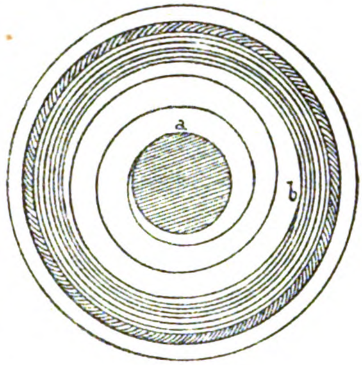


Fig. 21.

Remarquons que, dans une montre habituelle, où le barillet exécute 3 tours en 24 heures, on peut parfaitement admettre que toute la lame se trouve libre pendant que le ressort se développe de ces trois tours, et on peut sans grande erreur se servir de la formule ci-dessus sans y rien modifier.

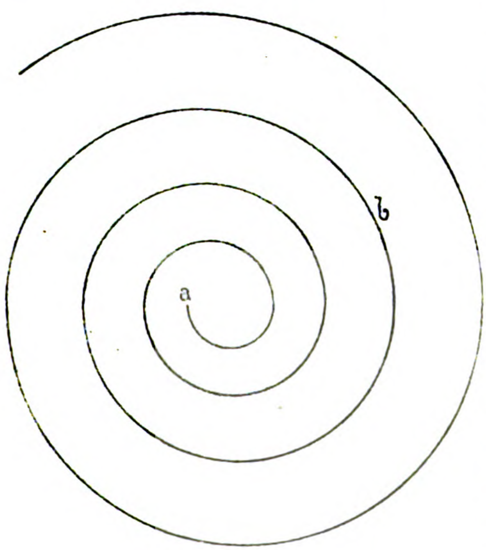


Fig. 22.

126. On a essayé d'employer des ressorts d'épaisseur variable, c'est-à-dire dont la lame augmente ou diminue d'épaisseur d'une extrémité à l'autre.

Supposons en premier lieu que l'épaisseur aille en aug-

mentant; à l'intérieur, la lame, étant plus mince, fléchira plus aisément; pendant le remontage du ressort, la partie des lames qui se détache de celles qui restent appuyées, opèrera ce mouvement d'une manière plus graduée que si l'épaisseur était la même sur toute la longueur. En continuant à remonter le ressort, une partie des lames s'enroule autour de la bonde et fait corps avec elle. Ainsi, le moment de la force du ressort ne pourrait être déterminé dans ce cas qu'en prenant pour longueur sa partie libre seulement et la valeur de n devrait être déterminée de même suivant cette longueur. Comme l'épaisseur est en outre variable, il devient difficile de déterminer la force d'un tel ressort d'une manière suffisamment exacte par le calcul.

Les ressorts de ce genre sont employés avec avantage dans les pièces à fusée, parce qu'ils ont un développement plus concentrique et produisent par suite moins de frottement entre les lames.

Si, par le fait de la diminution d'épaisseur à l'intérieur, il résultait une différence plus grande entre les moments de force du haut en bas, cette différence pourrait être facilement corrigée par la fusée.

127. Les ressorts plus épais à l'intérieur qu'à l'extérieur sont peu recommandables, car la partie intérieure de la lame, ne fléchissant que difficilement, s'enroule avec peine autour de la bonde; elle a en outre pour effet de détacher une plus grande longueur de lame de la partie qui reste appuyée contre le tambour, ce qui produit un frottement considérable entre les spires. Ces ressorts ont de plus une grande tendance à se rompre.

128. Le défaut principal du développement du ressort dans l'intérieur du barillet est celui qui provient de l'enroulement ou du déroulement excentrique des lames; celles-ci se jettent de côté aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du ressort. C'est du reste un fait analogue à celui qui se remarque dans un spiral plat sans courbe ramenée. Lorsque le défaut à l'intérieur vient combattre le défaut à l'extérieur, le

ressort fait un saut subit en produisant un bruit bien connu des horlogers.

On peut remédier au défaut extérieur en fixant au ressort une bride flexible de longueur suffisante, un demi-tour environ; cette bride doit être amincie dans sa partie qui s'accroche au tambour, afin de lui permettre de suivre facilement l'enroulement du ressort. Un meilleur remède serait de laisser le dernier demi-tour extérieur plus épais et de l'aminoir ensuite convenablement.

De l'arrêtage.

129. On désigne sous ce nom un mécanisme fixé au barillet et dont le but est de produire l'arrêt du remontage avant que le ressort soit complètement enroulé autour de la bonde. Ce même mécanisme produit aussi l'arrêt de la marche de la montre avant que le ressort soit complètement appuyé contre la paroi intérieure du barillet: il a donc pour effet de n'utiliser qu'une partie du développement du ressort, celle pendant laquelle la force est la plus égale. Ainsi le développement total d'un ressort étant, par exemple, de six tours, si l'on produit l'arrêt du remontage à cinq tours et demi d'enroulement, le ressort sera encore tendu d'un tour et demi lorsque la montre s'arrête.

Dans la très grande généralité des montres, en effet, ce mécanisme permet au barillet d'exécuter quatre révolutions sur lui-même et, si ce mobile fait un tour en huit heures, comme c'est souvent le cas, la montre pourra marcher pendant 32 heures.

L'arrêtage le plus moderne est celui dit à « croix de Malte ». Il est composé de deux seules pièces: le *doigt* et la *roue*. Cette dernière prend le nom de croix de Malte à cause de sa forme; elle est placée sur le barillet, où elle peut tourner librement, tandis que le doigt est fixé sur l'arbre. La tête de cette pièce vient engrener dans les entailles de la

croix, dont les dents creusées peuvent glisser successivement autour de la circonférence du doigt.

En remontant la montre, on fait tourner l'arbre de barillet; le doigt participe donc à ce mouvement et fait passer à chaque tour une dent de la croix de Malte jusqu'au moment où l'épaule du doigt vient rencontrer la dent pleine de la roue; le mouvement est alors arrêté et la montre est remontée (fig. 23).

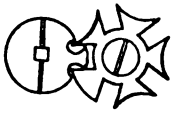


Fig. 23.

Pendant la marche, le doigt est fixe et la croix de Malte, tournant avec le barillet, vient à chaque tour présenter une de ses entailles devant la tête du doigt, qui l'oblige à exécuter une fraction de tour sur elle-même (fig. 24). Après les quatre révolutions du barillet, l'autre épaule du doigt vient de nouveau rencontrer la dent pleine de la croix et l'arrêt de la montre se produit (fig. 25).

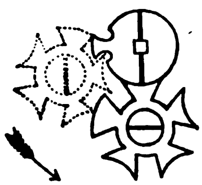


Fig. 24.

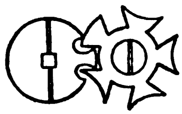


Fig. 25.

130. **Construction géométrique de l'arrêtage à croix de Malte.** — Pour construire graphiquement cet arrêtage, nous supposons connue la distance OO′ entre les centres du barillet et de la croix de Malte (fig. 26). On divise cette distance en cinq parties égales et, du centre O, avec un rayon égal à trois de ces divisions, on décrit une circonférence que l'on répète une seconde fois du point O′ comme centre.

De ce dernier centre on décrit encore un nouveau cercle passant par le centre du barillet et on divise cette dernière circonférence en cinq parties égales. Afin d'obtenir la tête du doigt dans l'une des entrées de la croix de Malte, la division est commencée à partir du point 1′; en d'autres cas, on commencera à diviser à partir du point O ou de tout autre point intermédiaire.

La circonférence du doigt se décrit avec un rayon égal à la moitié de la distance OO′; des points 1′, 2′, 3′ et 5′, on tracera avec ce même rayon des arcs AC, A′C′, etc., des bran-

ches de la croix. Les intersections C, A′, etc., détermineront par conséquent aussi la largeur des entrées, dont les côtés droits se traceront parallèles entre eux et à égale distance du centre O′.

La forme de la tête du doigt doit remplir comme condi-

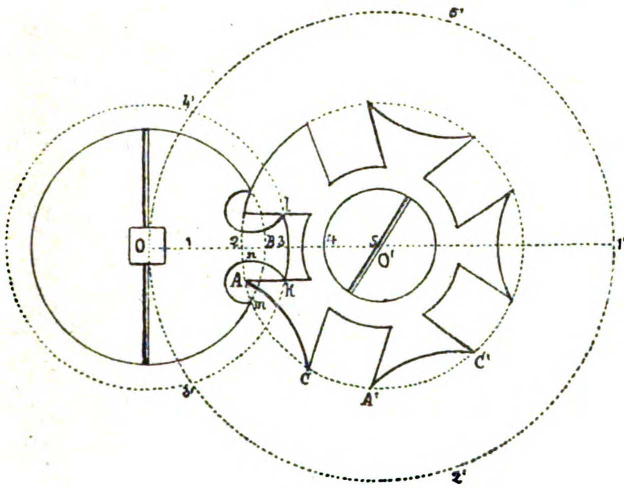


Fig. 26.

tions essentielles la solidité de la pièce et le libre fonctionnement du mécanisme. Nous la représentons de préférence au moyen de deux arcs de cercle: l'un *mn*, de longueur égale à une demi-circonférence, et l'autre *nk*, dont le centre se trouve à peu près sur la pointe de l'épaulement du doigt.

Pratiquement, la grandeur *kl* de la tête du doigt doit être légèrement moins étendue que celle de l'entrée de la roue, c'est-à-dire qu'il doit exister un certain jeu pour assurer le libre fonctionnement du mécanisme; ce jeu s'obtiendra facilement en enlevant les coins vifs *k* et *l* du doigt.

Il est aussi recommandable, en pratique, d'exécuter la dent pleine de la croix de Malte avec un rayon O′D plus long que le rayon O′C des dents creusées, afin d'obtenir l'arrêt un peu avant la ligne des centres. Il est nécessaire, en outre, d'arrondir légèrement les coins A, C, A′, C′, etc. des dents de la roue.

CHAPITRE III

DU ROUAGE

131. **Buts du rouage.** — Les roues d'une montre et d'une horloge ont un double but à remplir : 1° de transmettre le mouvement, provenant de l'organe moteur, du premier mobile jusqu'à l'échappement ; 2° de compter le nombre d'oscillations accomplies par le balancier en un temps donné, en indiquant ce temps au moyen d'aiguilles sur un cadran divisé.

Puisque d'un côté le mouvement du balancier est un mouvement rapide et que de l'autre la force motrice ne doit se dépenser que lentement, qu'en outre les roues portant les aiguilles doivent exécuter des nombres de tours suivant un rapport donné, on comprend que le rouage doive être établi de manière à multiplier progressivement la vitesse du premier mobile. C'est pour cette raison que l'on fait engrener les roues dans des pignons et que les nombres de dents de ces divers mobiles doivent être parfaitement déterminés.

Remarquons encore qu'en augmentant ainsi considérablement la vitesse on diminue dans la même proportion la force transmise à la roue d'échappement.

Calculs du rouage.

132. **Calculs des nombres de tours.** — Déterminons d'abord la proportion qui doit exister entre les nombres de tours exécutés par les mobiles d'un engrenage et leur nombre de

dents. Connaissant les nombres A de dents d'une roue et a d'ailes du pignon dans lequel elle engrène, nous avons donc à rechercher le nombre n' de rotations accomplies par le pignon pendant que la roue en exécute un nombre n.

Supposons une roue de $A = 96$ dents engrenant dans un pignon de $a = 12$ ailes : comme chaque dent de la roue conduit une aile de pignon, il est évident que, pendant que le pignon exécute une rotation, il aura avancé autant de dents de la roue que ce pignon a d'ailes, et que par conséquent le pignon fera autant de tours que son nombre d'ailes est compris de fois dans le nombre de dents de la roue ; on aura donc

$$n' = \frac{A}{a} = \frac{96}{12} = 8.$$

Si l'on veut connaître le nombre de rotations accomplies par le pignon pendant que la roue en exécute un nombre quelconque, $n = 4$, par exemple, le nombre n' deviendra n fois plus considérable et on pourra poser :

$$(1) \qquad n' = n\,\frac{A}{a} = 4 \times \frac{96}{12} = 32 \text{ tours.}$$

On peut présenter l'égalité précédente sous la forme :

$$(2) \qquad \frac{n'}{n} = \frac{A}{a}.$$

Les nombres de tours exécutés par les deux mobiles sont donc inversement proportionnels à leurs nombres de dents.

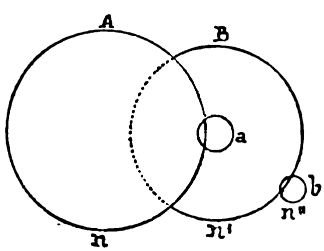


Fig. 27.

133. Considérons maintenant un train d'engrenage formé de deux roues et de deux pignons (fig. 27), la roue de A dents engrenant dans le pignon de a ailes, sur l'axe duquel est fixée une roue de B dents engrenant dans un pignon de b ailes.

Pendant que la roue A accomplit n rotations, B en fait un nombre n' et b un nombre n''.

Le nombre de tours que le pignon a exécute pendant que la roue A en fait un nombre n, est exprimé par la formule (1) :

$$n' = n \frac{A}{a};$$

d'autre part, le nombre de tours que le pignon b exécute pendant que la roue B en fait un nombre n', doit être

$$n'' = n' \frac{B}{b}.$$

Mais puisque dans cette dernière formule

$$n' = n \frac{A}{a},$$

on peut écrire en remplaçant n' par sa valeur :

$$(3) \qquad n'' = n \frac{A}{a} \times \frac{B}{b} = n \frac{AB}{ab},$$

ou encore :

$$(4) \qquad \frac{n''}{n} = \frac{AB}{ab}.$$

Si, par exemple, une roue de centre a 80 dents, le pignon de roue moyenne 10 ailes, la roue moyenne 75 dents et le pignon de secondes 10 ailes, on déterminera le nombre de tours que doit faire ce dernier pignon pendant que la roue de centre en fait 1, en remplaçant les lettres de la formule (3) par leur valeur numérique ; donc

$$n'' = 1 \times \frac{80 \times 75}{10 \times 10} = 60 \text{ tours}.$$

Le pignon de secondes exécute donc 60 rotations pendant que la roue de centre en fait une. Comme l'axe de la roue de centre porte l'aiguille des minutes et que l'axe de la roue de secondes porte l'aiguille de secondes, le mouvement s'exécutera bien suivant les conditions admises pour la division du temps.

S'il fallait calculer le nombre de rotations du pignon de secondes pendant que la roue de centre en fait 24, on poserait d'une manière analogue

$$n'' = 24 \times \frac{80 \times 75}{10 \times 10} = 1440 \text{ tours.}$$

134. On pourrait déterminer de même pour un nombre quelconque de roues et de pignons le rapport des nombres de tours du dernier pignon à ceux de la première roue. Ce rapport est toujours égal au quotient de la division du produit des nombres de dents des roues par le produit des nombres d'ailes des pignons. On peut donc poser d'une manière générale

$$(5) \qquad \frac{n^{m}}{n} = \frac{\text{ABCDE.....}}{abcde.....}.$$

Soit, par exemple, à déterminer le nombre de révolutions accomplies par un pignon d'échappement pendant que le barillet en exécute 4, sachant que ce barillet a 96 dents, la roue de centre 96 aussi, la roue moyenne 90, la roue de secondes 80: tous les pignons ont 12 ailes, sauf celui d'échappement, qui en a 8.

Nous écrivons la formule (5) sous la forme :

$$(6) \qquad n^{\text{IV}} = n \, \frac{\text{ABCD}}{abcd},$$

d'où, en remplaçant,

$$n^{\text{IV}} = 4 \times \frac{96 \times 96 \times 90 \times 80}{12 \times 12 \times 12 \times 8} = 19200 \text{ tours.}$$

135. **Calcul du nombre d'oscillations du balancier.** — Il est généralement convenu d'indiquer le nombre d'oscillations que le balancier d'une montre accomplit pendant une heure, par conséquent pendant que la roue de centre, qui porte l'aiguille des minutes sur son axe, exécute un tour.

136. Nous avons déjà fait remarquer que, dans la généralité des échappements, l'action d'une même dent de la roue correspond à deux oscillations du balancier (73). Connaissant donc le nombre de rotations qu'accomplit la roue

d'échappement pendant une heure, on calculera facilement le nombre d'oscillations que le balancier exécute pendant ce même temps en multipliant le nombre de tours de la roue d'échappement par le double du nombre de ses dents, opération que l'on peut représenter, en désignant par E le nombre de dents de cette dernière roue et par N le nombre d'oscillations, par la formule

$$N = 2\,E\,n''' . \qquad (7)$$

Si une roue d'échappement de 15 dents exécute, par exemple, 600 tours pendant que la roue de centre en fait 1, on obtiendra le nombre d'oscillations accomplies par le balancier par

$$N = 2 \times 15 \times 600 = 18\,000 \text{ oscillations.}$$

137. Si nous désignons par
B le nombre de dents de la roue de centre,
C le nombre de dents de la roue moyenne,
D le nombre de dents de la roue de secondes,
b le nombre d'ailes du pignon de roue moyenne,
c le nombre d'ailes du pignon de secondes,
d le nombre d'ailes du pignon d'échappement,
nous devons avoir, d'après la formule (5),

$$n''' = n\,\frac{BCD}{bcd};$$

mais comme $n = 1$,

$$n''' = \frac{BCD}{bcd}.$$

En remplaçant n''' par cette dernière valeur dans l'équation (7), on obtiendra la formule générale :

$$N = \frac{BCD2E}{bcd}, \qquad (8)$$

formule qui nous permettra de calculer le nombre d'oscillations accomplies par un balancier pendant une heure, connaissant le nombre de dents des différents mobiles.

Soit, comme exemple numérique, à calculer le nombre d'oscillations d'un balancier, sachant que

$$B = 64, \quad C = 60, \quad D = 60, \quad E = 15,$$
$$b = 8, \quad c = 8, \quad d = 6,$$

L'application de la formule (8) donnera :

$$N = \frac{64 \times 60 \times 60 \times 2 \times 15}{8 \times 8 \times 6} = 18000 \text{ oscillations.}$$

138. **Calcul des nombres de dents.** — Soit maintenant à calculer les nombres de dents des roues et d'ailes des pignons, les nombres de tours ou d'oscillations étant connus. Cette question, inverse de la précédente, peut recevoir plusieurs solutions : en effet, si l'on prend l'équation

$$\frac{n^{\text{IV}}}{n} = \frac{A\,B\,C\,D}{a\,b\,c\,d},$$

dans laquelle le rapport $\frac{n^{\text{IV}}}{n}$ seul serait connu et dans laquelle les quantités inconnues seraient A, B, C, D et a, b, c, d, on voit immédiatement qu'un nombre illimité de valeurs pourrait satisfaire à ce rapport; l'équation est en effet indéterminée et fournit autant d'inconnues qu'il y a de roues et de pignons.

Pour les déterminer, on choisit arbitrairement la valeur d'une partie de ces inconnues et, afin qu'il ne se présente pas, après solution, de nombres fractionnaires au résultat, on établit les nombres d'ailes des pignons en choisissant les nombres employés dans l'usage pratique.

Ces nombres sont le plus généralement : 6, 7 et 8 pour les pignons d'échappement; 8, 10 et 12 pour les pignons de secondes et de roue moyenne; 10, 12 et 14 pour les pignons de roue de centre.

Les valeurs a, b, c, d, devenant ainsi quantités connues, pourront être transportées dans le premier membre de l'équation, qu'on écrira sous la forme

$$\frac{n^{\text{IV}}}{n}\,a\,b\,c\,d = A\,B\,C\,D.$$

Pour résoudre l'équation, il suffira ensuite de réduire tous les nombres connus du premier membre en facteurs premiers et de réunir ces facteurs en autant de groupes qu'il y a d'inconnues à déterminer.

Prenons un exemple numérique et soit dans l'équation ci-dessus le rapport

$$\frac{n^{\text{IV}}}{n} = 4800.$$

Nous aurons donc

$$4800 = \frac{A\,B\,C\,D}{a\,b\,c\,d};$$

choisissons pour les pignons les nombres d'ailes suivants :

$$a = 10,\ b = 10,\ c = 10 \text{ et } d = 7\ ;$$

on posera

$$4800 \times 10 \times 10 \times 10 \times 7 = A\ B\ C\ D.$$

La réduction de 4800 en facteurs premiers nous donne :

4800	
2400	2
1200	2
600	2
300	2
150	2
75	2
25	3
5	5
1	5

$$4800 = 2^6 \times 3 \times 5^2$$
$$10 = 2 \times 5$$

et 7 est déjà nombre premier.

On aura donc le produit total :

$$2^9 \times 3 \times 5^5 \times 7 = 4800 \times 10 \times 10 \times 10 \times 7 = ABCD,$$

avec les facteurs duquel nous pourrons former les groupes suivants :

$A = 2^4 \times 5 = 80$ ou $A = 2^2 \times 5^2 = 100$
$B = 2^4 \times 5 = 80$ $B = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$
$C = 3 \times 5^2 = 75$ $C = 2^4 \times 5 = 80$
$D = 2 \times 5 \times 7 = 70$ $D = 2 \times 5^2 = 50$

etc.

En employant d'autres nombres d'ailes pour les pignons, on peut multiplier les solutions à l'infini. Comme preuve, on doit avoir

$$4800 = \frac{80 \times 80 \times 75 \times 70}{10 \times 10 \times 10 \times 7} = \frac{100 \times 84 \times 80 \times 50}{10 \times 10 \times 10 \times 7}.$$

139. Lorsque le rapport $\frac{n^{\text{IV}}}{n}$ est fractionnaire, on décompose le numérateur et le dénominateur séparément, puis on retranche les facteurs communs. Dans le cas où cette élimination ne pourrait s'effectuer, le problème deviendrait impossible avec les nombres d'ailes choisis et il faudrait les remplacer par d'autres.

Soit, par exemple, la forme

$$\frac{n''}{n} = \frac{360}{7}.$$

Ce cas est impossible à résoudre avec deux pignons de 10 ailes, car dans

$$\frac{360 \times 10 \times 10}{7} = \frac{2^5 \times 3^2 \times 5^3}{7}$$

il n'existe pas de facteur 7 au numérateur qui puisse servir à l'élimination de celui du dénominateur. Par contre, si l'on choisit les deux nombres 14 et 10, on aura

$$\frac{360 \times 14 \times 10}{7} = \frac{2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7}{7}$$

et l'on pourra retrancher le facteur 7. On forme ensuite deux groupes avec les chiffres qui restent et l'on obtient, par exemple :

$$A = 2^4 \times 5 = 80,$$
$$B = 2 \times 3^2 \times 5 = 90.$$

Comme preuve, on aura bien

$$\frac{80 \times 90}{10 \times 14} = \frac{360}{7}.$$

140. Soit encore à déterminer les nombres de dents des roues d'une montre dont le balancier doit accomplir 16 200 oscillations par heure.

La formule (8) donne

$$16200 = \frac{BCD2E}{bcd};$$

choisissons pour les pignons les nombres d'ailes suivants :

$$b = 12,\ c = 10,\ d = 8;$$

comme le nombre de dents de la roue d'échappement ne varie que dans des limites très étroites, nous pouvons encore remplacer la lettre E par le chiffre 15, par exemple. Ce nombre est en effet celui qui est assez généralement admis pour les montres de grandeur moyenne. On aura donc :

$$16200 = \frac{B\,C\,D \times 2 \times 15}{12 \times 10 \times 8},$$

ou, en transposant les termes connus :

$$\frac{16200 \times 12 \times 10 \times 8}{2 \times 15} = B\,C\,D.$$

La simplification donne encore :

$$16200 \times 4 \times 8 = B\,C\,D.$$

En réduisant en facteurs premiers, on obtient :

$$2^8 \times 3^4 \times 5^2 = B\,C\,D,$$

avec lesquels on peut former les groupes suivants :

$$B = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$
$$C = 2^4 \times 5 \quad = 80$$
$$D = 2^3 \times 3^2 \quad = 72.$$

La vérification de l'opération doit donner :

$$16200 = \frac{90 \times 80 \times 72 \times 2 \times 15}{12 \times 10 \times 8}.$$

Nous nous occuperons, dans les problèmes qui suivront, des nombres à attribuer aux dentures du barillet et du pignon de centre.

141. Le nombre d'oscillations du balancier était très variable dans les anciennes montres; il n'était soumis à aucune règle fixe et variait entre 17 000 et 18 000. Comme ces mon-

tres n'avaient pas d'aiguille de secondes, la vitesse du balancier n'avait dans ces limites qu'une importance relative.

Dans nos pièces modernes, spécialement dans les montres au-dessus de 12 lignes (27 mm.), il est généralement adopté cinq oscillations par seconde, soit 18 000 par heure.

Dans les pièces plus petites, on augmente ce chiffre jusqu'à 6 oscillations par seconde, soit 21 600 par heure, afin de diminuer l'influence des secousses du « porter », toujours très sensible sur les petits balanciers dont ces montres sont munies.

Une grande partie des montres anglaises battent 16 200 oscillations, soit 4 $^1/_2$ par seconde.

Les chronomètres de marine battent 4 oscillations par seconde, soit 14400 par heure.

142. Les problèmes qui suivent, sont des applications des théories précédentes et aideront à mieux les comprendre. Nous insistons spécialement sur le fait de l'emploi constant des formules et engageons les élèves à prendre l'habitude de résoudre ces questions en appliquant à chaque cas l'équation qui convient. La voie algébrique est un guide sûr qui conduit toujours à une solution correcte et à des résultats précis; dans les exercices suivants nous donnons de nombreux exemples de la sobriété de calcul résultant de l'emploi des simples formules que nous venons d'établir.

Problèmes relatifs aux questions précédentes.

143. *Un barillet de 80 dents engrène dans un pignon de roue de centre de 10 ailes; combien de tours effectuera ce pignon pendant que le barillet en fait 1?*

Solution. — Nous avons la formule (1) qui donne

$$n' = n\frac{A}{a} = 1 \times \frac{80}{10} = 8.$$

Le pignon exécute 8 tours pendant que le barillet en fait 1; une révolution du barillet a donc dans ce cas une durée de 8 heures.

144. *Combien de tours fera ce même pignon pendant que le barillet en fait 4 ?*

Solution. — La formule (1) donne encore

$$n' = n\frac{A}{a} = 4 \times \frac{80}{10} = 32.$$

Pendant que le barillet fait 4 tours, le pignon de roue de centre en fait 32. Comme l'arrêtage est placé de façon que le barillet puisse justement exécuter quatre rotations sur son axe (129), la montre marchera donc pendant 32 heures.

145. *Une roue de centre de 64 dents engrène dans un pignon de roue moyenne de 8 ailes ; la roue moyenne de 60 dents engrène dans un pignon de 8 ailes aussi. Combien de tours fera ce dernier pignon pendant un tour de la roue de centre ?*

Solution. — La formule (3)

$$n'' = n\frac{A\,B}{a\,b}$$

nous donne en remplaçant :

$$n'' = 1 \times \frac{64 \times 60}{8 \times 8} = 60.$$

Le pignon de secondes exécutera 60 rotations pendant une révolution de la roue de centre, donc pendant une heure.

146. *Quel est le nombre de rotations qu'accomplira un pignon d'échappement de 7 ailes pendant 12 heures, sachant que la roue de centre de 80 dents engrène dans un pignon de roue moyenne de 10 ailes, dont la roue de 75 dents engrène dans un pignon de secondes de 10 ailes ; la roue de secondes, enfin, ayant 70 dents ?*

Solution. — Nous poserons la formule générale pour un train de trois engrenages :

$$n''' = n\frac{A\,B\,C}{a\,b\,c},$$

d'où, en remplaçant :

$$n''' = 12 \times \frac{80 \times 75 \times 70}{10 \times 10 \times 7} = 7200 \text{ tours}.$$

147. *Quel est le nombre de tours exécuté par un pignon d'échappement pendant 3 tours du barillet, le rouage ayant les dentures suivantes :*

Barillet	*96 dents.*	*Pign. de centre*		*12*	*ailes.*
Roue de centre	*90*	»	*de moyenne*	*12*	»
» *moyenne*	*80*	»	*de secondes*	*10*	»
» *de secondes*	*72*	»	*d'échapppement*	*8*	»

Solution. — Nous poserons la formule

$$n^{IV} = n\,\frac{A\,B\,C\,D}{a\,b\,c\,d},$$

ou

$$n^{IV} = 3 \times \frac{96 \times 90 \times 80 \times 72}{12 \times 12 \times 10 \times 8} = 12960 \text{ tours.}$$

148. *Soit à calculer le nombre d'oscillations qu'un balancier fait pendant une heure : la roue de centre ayant 64 dents, la roue moyenne 60, la roue de secondes 56, la roue d'échappement 15, les pignons de roue moyenne et de secondes chacun 8 ailes et celui d'échappement 7.*

Solution. — La formule (8) donne

$$N = \frac{B\,C\,D\,2\,E}{b\,c\,d},$$

d'où

$$N = \frac{64 \times 60 \times 56 \times 2 \times 15}{8 \times 8 \times 7} = 14\,400 \text{ oscillations.}$$

149. *Quels doivent être les nombres de dents d'une roue de secondes engrenant dans un pignon d'échappement, sachant que le pignon doit accomplir 10 tours pendant que la roue en fait 1 ?*

Solution. — La proportion (2)

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{a}$$

donne, en remplaçant n' et n par leur valeur,

$$\frac{10}{1} = \frac{A}{a};$$

cette équation à deux inconnues, A et a, donne lieu à une indétermination; plusieurs solutions peuvent donc satisfaire à la demande. Remplaçant successivement a par les nombres

$$6, 7, 8, 10...,$$

nous trouvons pour A les valeurs correspondantes:

$$60, 70, 80, 100...,$$

car

$$\frac{10}{1} = \frac{60}{6} = \frac{70}{7} = \frac{80}{8} = \frac{100}{10} = \text{etc.}$$

On obtient donc le nombre de dents de la roue en multipliant le nombre d'ailes choisi par le nombre de rotations que doit exécuter le pignon, ce qui est toujours possible lorsque le nombre de tours est entier.

Si, au lieu de choisir le nombre d'ailes du pignon, on prenait le nombre de dents de la roue, le résultat courrait facilement le risque de devenir fractionnaire.

L'équation (2) peut s'écrire, en faisant $n = 1$,

$$a = \frac{A}{n'}.$$

Soit A = 66, nous aurions pour le cas précédent:

$$a = \frac{66}{10} = 6\ {}^3/_5,$$

solution impossible à réaliser.

Il est donc préférable de choisir toujours les nombres d'ailes des pignons et de déterminer avec ceux-ci les nombres de dents des roues.

150. *Soit à déterminer le nombre de dents d'une roue moyenne et le nombre d'ailes d'un pignon de secondes combinés de telle façon que le pignon exécute 15 rotations pendant que la roue en fait 2.*

Solution. — On posera (2)

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{a},$$

et, en remplaçant,

$$\frac{15}{2} = \frac{A}{a}.$$

Comme 15 et 2 sont des nombres premiers entre eux et qu'il est par le fait impossible de simplifier leur rapport, il est nécessaire, pour éviter des nombres fractionnaires, que A soit un multiple de 15 et a un multiple correspondant de 2. Ainsi on pourra avoir :

$$\frac{15}{2} = \frac{45}{6} = \frac{75}{10} = \frac{90}{12} = \text{etc.}$$

Les nombres 45, 75, 90 conviendraient donc pour la roue A et 6, 10, 12 pour le pignon a.

151. *On demande le nombre de dents d'un barillet et le nombre d'ailes du pignon de roue de centre dans lequel il engrène, de façon que la montre puisse marcher 8 jours avec 4 tours de barillet.*

Solution. — De l'équation (2) nous tirons la valeur

$$A = \frac{n'}{n} a,$$

dans laquelle $n' = 8 \times 24 = 192$ et $n = 4$; donc,

$$A = \frac{192}{4} a = 48\ a.$$

En remplaçant successivement a par les nombres 6, 7, 8, 10, on arrive à

$$A = 48 \times 6 = 288$$
$$A = 48 \times 7 = 336$$
$$A = 48 \times 8 = 384$$
$$A = 48 \times 10 = 480.$$

Ces solutions offrent l'inconvénient de donner des nombres de dents trop élevés au barillet, car, même en choisissant pour a un pignon de 6 ailes, on obtient encore un barillet de 288 dents.

Pour éviter cet inconvénient, on a recours quelquefois à un pignon intermédiaire entre le barillet et la roue de centre;

dans ce pignon viendra engrener le barillet, et la roue montée sur l'axe de ce pignon devra engrener dans celui de la roue de centre. La difficulté est ainsi tournée et se réduit à trouver dans la montre la place pour loger un mobile de plus et à augmenter la force motrice d'une quantité très appréciable.

Pour résoudre le problème ainsi posé, nous nous servirons de la formule (4)

$$\frac{n''}{n} = \frac{\text{A B}}{a\,b}$$

et nous aurons

$$\frac{192}{4} = \frac{\text{A B}}{a\,b} = 48.$$

Choisissant, pour a, 12 ailes et, pour b, 10, on a

$$\text{AB} = 48 \times 12 \times 10.$$

Décomposant le deuxième membre de l'égalité en facteurs premiers, on obtiendra

$$2^7 \times 3^2 \times 5 = \text{AB},$$

avec lesquels on pourra former les deux groupes :

$$\text{A} = 2^3 \times 3^2 = 72$$
$$\text{B} = 2^4 \times 5 = 80,$$

ou bien

$$\text{A} = 2^5 \times 3 = 96$$
$$\text{B} = 2^2 \times 3 \times 5 = 60.$$

Comme preuve, on doit trouver que

$$48 = \frac{72 \times 80}{12 \times 10} = \frac{96 \times 60}{12 \times 10}.$$

152. *Soit à déterminer les nombres de dents et d'ailes des roues et pignons formant la minuterie. — Description de ce mécanisme.*

La *minuterie* est le mécanisme qui a pour but d'obtenir le mouvement de l'aiguille d'heures. Comme la roue de centre exécute un tour par heure, on fixe sur le prolongement de son axe, sous le cadran, un deuxième pignon appelé la

chaussée. Cet ajustement est fait de façon que la chaussée participe au mouvement de la roue de centre pendant la marche ordinaire de la montre, tout en étant capable d'un mouvement séparé lorsqu'on veut remettre les aiguilles à l'heure. Ainsi la roue de centre, la chaussée et l'aiguille des minutes ont un mouvement commun et font un tour par heure. La chaussée *a* engrène dans la *roue de minuterie* A (fig. 28), qui porte un pignon *b* engrenant dans la *roue à canon* B. C'est cette dernière roue, placée habituellement sur la chaussée, autour de laquelle elle peut tourner librement, qui supporte l'aiguille des heures. La roue à canon doit donc exécuter un tour en 12 heures; autrement dit, la chaussée doit accomplir 12 rotations pendant que la roue à canon en fait une.

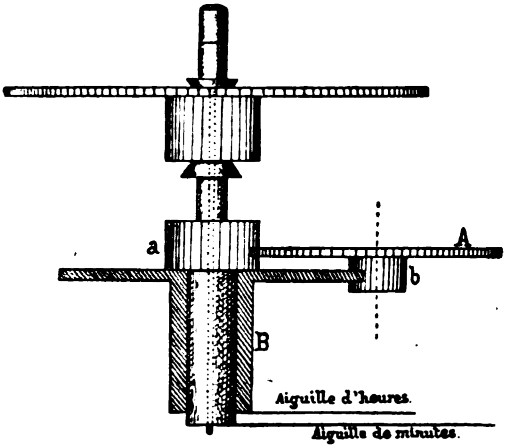


Fig. 28.

Dans l'équation (4) on remplace n'' par 12 et n par 1 ; les inconnues sont alors AB et *ab;* on a donc

$$\frac{12}{1} = \frac{A\,B}{a\,b} = 12,$$

et, en substituant à a et b les nombres 12 et 10, on aura

$$12 \times 12 \times 10 = AB.$$

En décomposant en facteurs premiers, il vient:

$$2^5 \times 3^2 \times 5 = AB,$$

que nous pouvons grouper de la manière suivante :

$$A = 2^2 \times 3^2 = 36$$
$$B = 2^3 \times 5 = 40.$$

Comme preuve, on a bien

$$12 = \frac{36 \times 40}{12 \times 10}.$$

Ces chiffres, 36 pour la roue de minuterie et 40 pour la roue à canon, sont très souvent employés en pratique; on donne alors 12 ailes à la chaussée et 10 au pignon de minuterie.

On peut évidemment former d'autres groupes, tels que ceux-ci :

$$A = 2^3 \times 3 = 24$$
$$B = 2^2 \times 3 \times 5 = 60,$$

ou bien

$$A = 2^5 = 32$$
$$B = 3^2 \times 5 = 45,$$

ou encore

$$A = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$B = 2^4 \times 3 = 48.$$

La vérification donne toujours:

$$\frac{24 \times 60}{12 \times 10} = \frac{32 \times 45}{12 \times 10} = \frac{30 \times 48}{12 \times 10} = 12.$$

Dans les petites montres ou les pièces à bon marché, on emploie souvent une chaussée de 10 ailes et un pignon de minuterie de 8 ailes, ce qui donne pour les roues :

$$12 \times 10 \times 8 = AB$$

et

$$2^6 \times 3 \times 5 = AB.$$

Les deux groupes ordinairement employés sont :

$$A = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$B = 2^5 \qquad\qquad = 32.$$

Quelquefois encore on se sert d'une chaussée de 14 ailes et d'un pignon de 8 ailes; il vient alors

$$12 \times 14 \times 8 = AB$$

et

$$2^6 \times 3 \times 7 = AB,$$

dont on peut faire

$$A = 2^2 \times 7 = 28$$
$$B = 2^4 \times 3 = 48.$$

Ces deux derniers cas donnent toujours

$$\frac{30 \times 32}{10 \times 8} = \frac{28 \times 48}{14 \times 8} = 12.$$

153. S'il s'agissait de construire la minuterie d'une montre dont le cadran soit divisé en 24 heures, la question ne serait pas plus complexe, puisqu'on n'aurait qu'à résoudre l'équation

$$24\, ab = AB$$

Soit, par exemple, $a = 12$ et $b = 10$, on aurait

$$24 \times 12 \times 10 = AB$$

et

$$2^6 \times 3^2 \times 5 = AB,$$

d'où

$$A = 2^4 \times 3 = 48$$
$$B = 2^2 \times 3 \times 5 = 60.$$

Preuve :

$$\frac{48 \times 60}{12 \times 10} = 24.$$

154. Si le même cadran devait montrer, au moyen d'une double paire d'aiguilles de couleur ou de forme différente, la division du temps en 24 heures et la division en 12 heures (fig. 29), il serait facile de conserver aux deux rouages la même chaussée et la même roue de minuterie ; on n'ajouterait qu'un deuxième pignon c fixé au-dessus du premier et engrenant dans une seconde roue à canon C ajustée librement sur la première roue.

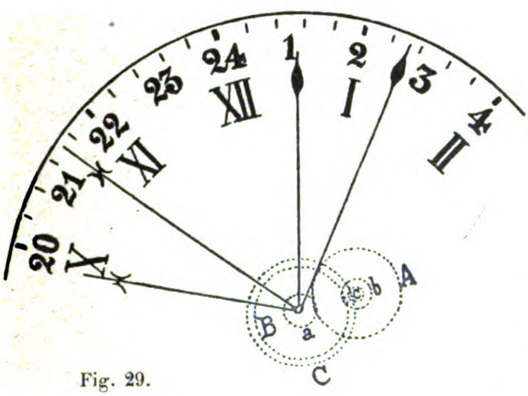


Fig. 29.

Admettant pour le premier rouage :

Chaussée 12 ailes,	Minuterie 36 dents,
Pignon 10 ailes,	Roue à canon 40 dents,

on devra avoir pour le deuxième rouage :

$$24 = \frac{36 \times C}{12 \times c}.$$

Choisissant, pour c, 6 ailes, on aura

$$24 = \frac{36 \times C}{12 \times 6},$$

d'où

$$C = \frac{24 \times 12 \times 6}{36} = 48.$$

On aura bien :

$$24 = \frac{36 \times 48}{12 \times 6}.$$

Les deux aiguilles de minutes se fixeront sur l'axe de la roue de centre, puisque dans les deux cas elles devront exécuter un tour en une heure ; leur écartement une fois réglé demeurera permanent.

155. *Calcul du nombre de dents des roues d'une horloge astronomique (régulateur à seconde) devant marcher 33 jours avec une descente de poids de 830 mm. La corde se déroule d'un cylindre de 15 mm. de rayon dans lequel est comprise la moitié de l'épaisseur de la corde. Cette corde est supposée mouflée.*

Solution. — Puisque la corde est mouflée, il s'en déroule du cylindre une longueur égale au double de la descente du poids, donc 1660 mm. En divisant cette longueur par la circonférence du cylindre, $2 \pi r$, nous obtiendrons le nombre de tours exécuté par ce cylindre pendant la descente du poids, soit

$$\frac{1660}{2 \times 3,1416 \times 15} = 17,6\ldots \text{ tours.}$$

Le cylindre exécute donc 17,6 tours pendant que le poids

descend de 830 mm, ou bien, suivant les données, pendant 33 jours, ou encore pendant $24 \times 33 = 792$ heures.

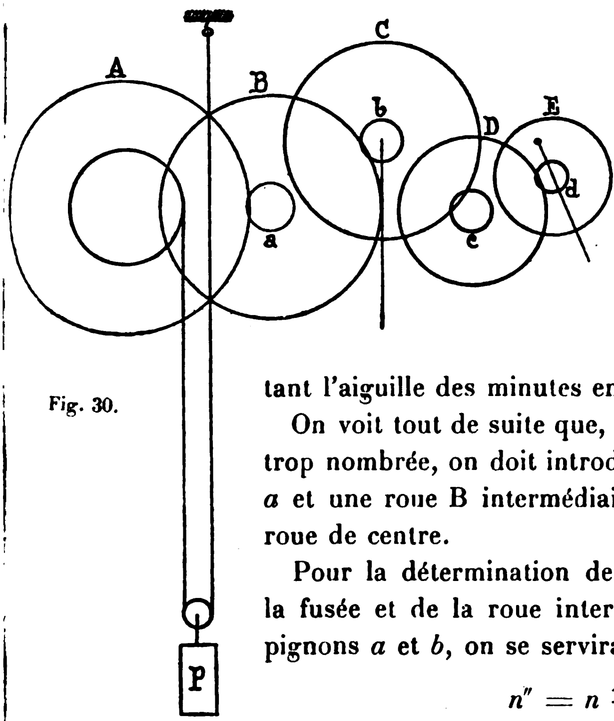


Fig. 30.

Un tour de cylindre s'effectuera donc en

$$\frac{792}{17,6} = 45 \text{ heures.}$$

Il faut par conséquent que, pendant que la roue fixée sur l'arbre du cylindre (roue de fusée) exécute un tour, la roue portant l'aiguille des minutes en exécute 45.

On voit tout de suite que, pour éviter une denture trop nombrée, on doit introduire (fig. 30) un pignon *a* et une roue B intermédiaires entre la fusée et la roue de centre.

Pour la détermination des nombres de dents de la fusée et de la roue intermédiaire, ainsi que des pignons *a* et *b*, on se servira de l'équation (3)

$$n'' = n \frac{A\ B}{a\ b},$$

dans laquelle $n'' = 45$ et $n = 1$. Si nous choisissons des pignons de 18 et de 16 ailes, on posera

$$45 \times 18 \times 16 = AB.$$

Le premier membre, décomposé en facteurs premiers, donne

$$2^5 \times 3^4 \times 5 = AB,$$

que l'on peut grouper de la manière suivante :

$$A = 2^2 \times 3^3 = 108$$
$$B = 2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

Nous aurions bien en effet

$$45 = \frac{108 \times 120}{18 \times 16}.$$

Pour déterminer les nombres convenant à la denture des autres mobiles, remarquons d'abord que, puisque le pendule

de ce régulateur doit battre une oscillation par seconde, une roue d'échappement de 30 dents exécutera un tour en une minute (73). On peut donc ajuster l'aiguille de secondes sur le prolongement de l'axe de son pignon *d*. La roue d'échappement exécute alors 60 tours pendant que la roue de centre en fait 1 et l'on aura, en employant des pignons de 12 et de 10 ailes,

$$60 \times 12 \times 10 = CD,$$

ou

$$2^5 \times 3^2 \times 5^2 = CD,$$

ce qui peut donner

$$C = 2 \times 3^2 \times 5 = 90,$$
$$D = 2^4 \times 5 = 80.$$

Comme preuve, on aura bien

$$60 = \frac{90 \times 80}{12 \times 10}.$$

156. *Si, au lieu de marcher 33 jours, on demandait une horloge marchant 13 mois, quels devraient être les nombres de dents du rouage, avec les mêmes données que celles du problème précédent ?*

Solution. — Treize mois comptés à raison de 30 jours font 390 jours ou 9360 heures. On pose

$$\frac{n'''}{n} = \frac{A\ B\ C}{a\ b\ c},$$

car on voit qu'en évitation de roues trop nombrées il faut introduire une deuxième roue intermédiaire entre la fusée et la roue de centre. On aura donc

$$\frac{9360}{17,6} = \frac{A\ B\ C}{a\ b\ c},$$

c'est-à-dire que, pendant que la roue de fusée fait 17,6 tours, la roue de centre doit en faire 9360.

Comme le rapport

$$\frac{9360}{17,6}$$

ne peut être employé à cause de la fraction du dénominateur, nous le transformerons en un rapport équivalent ayant comme dénominateur un nombre entier premier, au moyen de l'opération suivante :

$$\frac{9360}{17,6} = 531\ {}^{9}/_{11}\ ;$$

en multipliant ce quotient par 11, on obtient le nombre entier 5850, donc

$$\frac{9360}{17,6} = \frac{5850}{11}.$$

On aura par conséquent

$$\frac{5850}{11}\, a\, b\, c = \mathrm{A\,B\,C}.$$

En faisant le choix des nombres d'ailes des pignons, il faut prendre garde que le facteur 11 se trouve comme facteur dans l'un de ces nombres, afin de pouvoir éliminer le dénominateur. Prenons donc les chiffres 22, 16 et 14, on aura

$$\frac{5850}{11} \times 22 \times 16 \times 14 = \mathrm{A\,B\,C}$$

et

$$\frac{2^7 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13}{11} = \mathrm{A\,B\,C}.$$

On pourra former maintenant les groupes suivants :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 2^6 \times 3 &&= 192 \\ \mathrm{B} &= 2 \times 5 \times 13 &&= 130 \\ \mathrm{C} &= 3 \times 5 \times 7 &&= 105. \end{aligned}$$

Si l'on trouvait ces valeurs trop élevées, on pourrait choisir des pignons moins nombrés, par exemple 10, 11 et 12 ailes, et l'on aurait d'une manière analogue :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 2^3 \times 3 \times 5 &&= 120 \\ \mathrm{B} &= 2 \times 3 \times 13 &&= 78 \\ \mathrm{C} &= 3 \times 5^2 &&= 75. \end{aligned}$$

Pour les deux cas nous aurions bien

$$\frac{192 \times 130 \times 105}{22 \times 16 \times 14} = \frac{120 \times 78 \times 75}{12 \times 11 \times 10} = \frac{5850}{11}.$$

Pour les autres roues du rouage, le cas est le même qu'à l'exemple précédent.

En introduisant une troisième roue intermédiaire, on pourrait arriver à faire marcher une telle pendule pendant 10 ans, mais il existerait alors des inconvénients pratiques qui rendraient cette combinaison peu fréquente.

157. *Comment déterminer le nombre de dents d'une roue moyenne perdue, sachant que le balancier doit battre 18 000 oscillations par heure et connaissant le nombre de dents des autres roues et pignons?*

Solution. — Appelons x le nombre inconnu et soient:

Roue de centre	80	dents.	Pignon roue moy.	10	ailes.
Roue moyenne	x	»	Pignon secondes	10	»
Roue de secondes	70	»	Pignon d'échappement	7	»
Roue d'échappement	15	»			

La formule (8) permet de poser

$$18\,000 = \frac{80 \times x \times 70 \times 2 \times 15}{10 \times 10 \times 7},$$

ou, en effectuant,

$$18\,000 = 240\,x$$

et

$$x = \frac{18\,000}{240} = 75 \text{ dents.}$$

La roue moyenne égarée avait donc 75 dents.

158. *Si, dans le problème précédent, le mobile égaré avait été le pignon de roue moyenne, comment se résoudrait l'équation?*

Solution. — Nous aurions d'une manière analogue:

$$18\,000 = \frac{80 \times 75 \times 70 \times 2 \times 15}{x \times 10 \times 7}$$

ou

$$18\,000 = \frac{180\,000}{x}$$

et

$$x = \frac{180\,000}{18\,000} = 10 \text{ ailes.}$$

159. *En conservant les données précédentes, supposons que le pignon et la roue d'échappement soient à la fois perdus et proposons-nous de déterminer leurs dentures.*

Solution. — Nous aurons dans ce cas deux inconnues, que nous désignerons par x et y; l'équation (8) s'écrira:

$$18000 = \frac{80 \times 75 \times 70 \times 2\,x}{10 \times 10 \times y},$$

d'où

$$18000 = \frac{8400\,x}{y}$$

et

$$\frac{18000}{8400} = \frac{x}{y};$$

en simplifiant, on obtient:

$$\frac{15}{7} = \frac{x}{y}.$$

La roue doit donc avoir 15 dents et le pignon 7 ailes.

160. *Dans le dernier problème, nous sommes arrivés directement aux nombres réels, ce qui n'a pas toujours lieu. Soit, comme deuxième exemple, à rechercher les nombres de dents et d'ailes d'une roue de centre et d'un pignon de roue moyenne égarés.*

Solution. — On a

$$18\,000 = \frac{x \times 75 \times 70 \times 2 \times 15}{y \times 10 \times 7},$$

d'où l'on obtient

$$18000 = \frac{x}{y}\,2250$$

et

$$\frac{18\,000}{2250} = \frac{x}{y}.$$

La simplification donne

$$\frac{x}{y} = 8.$$

Ce résultat nous montre que la roue de centre doit avoir 8 fois plus de dents que le pignon a d'ailes. En remplaçant successivement y par 6, 7, 8, 10 et 12 ailes, on obtiendra les solutions suivantes :

pour	$y = 6$,	on a	$x = 6 \times 8 = 48$	dents.
»	$y = 7$,	»	$x = 7 \times 8 = 56$	»
»	$y = 8$,	»	$x = 8 \times 8 = 64$	»
»	$y = 10$,	»	$x = 10 \times 8 = 80$	»
»	$y = 12$,	»	$x = 12 \times 8 = 96$	»

Plusieurs solutions peuvent donc satisfaire à la demande et il faut alors choisir celle qui convient le mieux ; il est évident ici que, par rapport aux nombres de dents des autres mobiles, une roue de centre de 80 dents et un pignon de 10 ailes sont très admissibles.

161. **Indicateur du développement du ressort dans les pièces à fusée.** — Les chronomètres de marine et un grand nombre de montres à fusée portent une aiguille auxiliaire placée sur le cadran et dont le centre se trouve en ligne droite entre le point de XII heures et le milieu de la roue de centre. Cette aiguille a pour but d'indiquer, sur un petit cadran, le nombre d'heures que le chronomètre a marché depuis l'instant où il fut remonté pour la dernière fois. Elle avertit ainsi de l'opportunité de remonter le chronomètre, opération qui ramène alors l'aiguille au zéro.

Ce mécanisme, facile à établir dans les montres à fusée, devient difficile à introduire dans celles qui en sont dépourvues. Occupons-nous des premières pour le moment.

Lorsqu'on remonte une de ces pièces, on fait tourner l'axe de la fusée qui, une fois le ressort tendu, prend un

mouvement en sens contraire. Si donc on place sur cet axe un pignon communiquant son mouvement à la roue sur laquelle est fixée la petite aiguille, le mécanisme sera réalisé.

Le cadran indicateur est disposé de façon que le chiffre XII du grand cadran soit conservé en entier ; l'aiguille ne peut donc faire un tour complet. Admettons que, pendant que la montre marche 56 heures avec 8 tours de fusée, cette

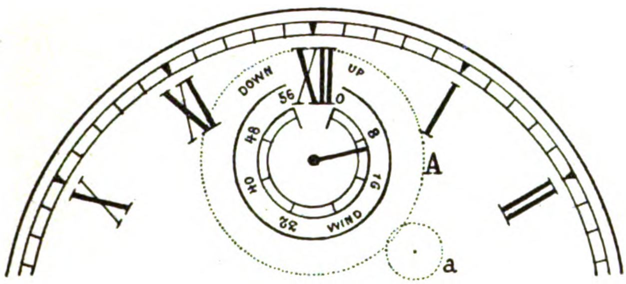


Fig. 31.

aiguille fasse $^7/_8$ de tours et qu'ainsi il reste $^1/_8$ de tour occupé par la partie inférieure du chiffre XII (fig. 31).

Il s'agit maintenant de déterminer les nombres de dents de la roue portant l'aiguille et du pignon fixé sur l'axe de la fusée, de manière à produire un mouvement répondant aux données ci-dessus.

Pendant que la fusée exécute $n' = 8$ tours, l'aiguille doit en faire $n = {^7/_8}$, donc (2)

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{a} \text{ ou } \frac{8}{^7/_8} = \frac{64}{7} = \frac{A}{a}.$$

La roue doit donc avoir un nombre de dents multiple de 64 et le pignon un nombre d'ailes multiple de 7.

On peut avoir pour

$$a = 7 \qquad A = 64$$
$$a = 14 \qquad A = 128 \text{ etc.}$$

Lorsque le chronomètre est en marche, la fusée est animée

d'un mouvement à gauche; l'aiguille tourne donc à droite, dans le même sens que les autres aiguilles.

Il peut arriver que, par suite de la disposition du calibre, on ne puisse faire engrener le pignon directement dans la roue; il faudra dans ce cas placer une deuxième roue engrenant d'un côté dans le pignon de fusée et de l'autre dans la roue portant l'aiguille. Ce dernier mobile prendra alors un mouvement à gauche et, si l'on voulait éviter cela, il faudrait disposer deux roues intermédiaires entre la roue A et le pignon *a*.

Remarquons que le nombre de dents de cette ou de ces roues intermédiaires ne modifie pas le rapport existant entre le mouvement de la roue A et celui du pignon *a*. En désignant par B le nombre de dents de la roue intermédiaire, on a en effet

$$\frac{n'}{n} = \frac{A\,B}{a\,B} = \frac{A}{a}.$$

162. **Quantièmes simples.** — On désigne sous ce nom un mécanisme accessoire au moyen duquel on fait indiquer sur le cadran de la montre la date, le jour de la semaine et le nom du mois. Ces indications se pratiquent à l'aide d'aiguilles fixées sur l'axe de roues dentées opérant leur évolution dans le laps de temps voulu, c'est-à-dire que l'aiguille indiquant la date saute d'une division chaque jour à minuit, de même que celle indiquant le jour de la semaine. Ces mouvements sont obtenus au moyen d'une roue exécutant une rotation en 24 heures. Le cadran indiquant la date est divisé en trente et une parties; l'aiguille saute donc, pour les mois de 31 jours, du chiffre 31 au chiffre 1; si le mois n'a que 28, 29 ou 30 jours, l'aiguille doit être amenée au chiffre 1 à l'aide de la main. C'est un inconvénient qui est supprimé dans les quantièmes perpétuels, mais ces mécanismes sont alors plus compliqués.

Les quantièmes sont fort souvent accompagnés de l'indication des phases de la lune. Une ouverture est, à cet effet, pratiquée dans le cadran, à travers lequel apparaissent suc-

cessivement les diverses figures de la lune. Le mouvement de notre satellite n'est pas continu comme dans la nature, mais intermittent ; il se produit chaque jour comme les autres fonctions du quantième.

Examinons maintenant de quelle manière s'effectuent

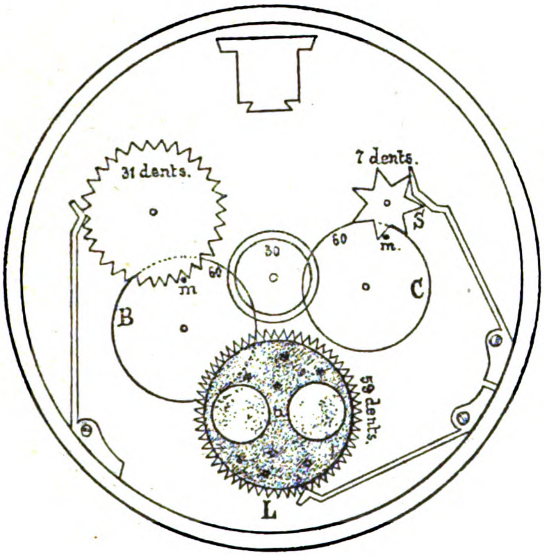


Fig. 32.

les divers mouvements que nous venons de mentionner (fig. 32).

La construction la plus simple consiste à placer une roue de 30 dents sur la roue à canon ; cette roue engrène dans deux autres roues B et C de soixante dents chacune. Ces derniers mobiles exécutent donc une révolution en 24 heures. La roue B porte perpendiculairement à son plan une goupille *m* venant engrener à chaque rotation dans la denture d'une « étoile » de 31 dents portant l'aiguille de quantième. Cette dernière roue est maintenue en place par un ressort-sautoir. Dans la journée, cette même goupille fait sauter de la même façon la roue de phase L. Cette roue compte 59 dents aussi en forme d'étoile; elle est de même maintenue

par un sautoir; sur sa surface sont représentées deux lunes diamétralement opposées. Lorsqu'au moment de la nouvelle lune l'un des disques disparaît derrière le cadran, le bord du suivant est sur le point d'apparaître en forme de léger croissant.

Une révolution synodique de la lune (intervalle compris entre deux pleines lunes consécutives) s'effectuant en 29 jours et demi à peu près[1], deux lunaisons demandent 59 jours environ ; c'est la raison pour laquelle on donne 59 dents à la roue de phases.

La deuxième roue C porte aussi une goupille destinée à faire sauter la roue S de 7 dents portant l'aiguille indiquant les jours de la semaine.

Le mouvement de l'aiguille indicatrice du mois s'effectue assez généralement à la main, au moyen d'une poussette extérieure; cette aiguille est portée par une étoile de 12 dents, maintenue en place pendant un mois par un ressort-sautoir analogue à ceux des autres étoiles.

La denture de ces différents rouages ne demande donc pas de grand calcul pour être déterminée.

163. *Soit à déterminer les nombres de dents et d'ailes du rouage d'une montre décimale, en convenant de conserver au balancier de ce mécanisme la même durée d'oscillation qu'à celui d'une montre ordinaire.*

Solution. — On appelle montre décimale un instrument divisant la durée d'un jour en vingt parties au lieu de vingt-quatre, donc l'intervalle compris entre minuit et midi, ou midi et le minuit suivant, en dix parties égales. Chacune de ces « heures » est divisée en cent « minutes. »

Posons encore comme condition que cette montre doive marcher aussi longtemps qu'une montre ordinaire (32 heures duodécimales).

Une montre ordinaire, munie d'un arrêtage habituel, pouvant marcher 1 jour $^1/_3$ pendant que son barillet fait 4 tours,

[1] Exactement, 29 jours, 12 heures, 44 minutes.

ce barillet exécutera donc 3 tours en un jour. Dans une montre décimale, la roue de centre devra par suite exécuter 20 rotations pendant que le barillet en fait 3.

Pendant que ce barillet fait 1 tour, la roue de centre en fera

$$\frac{20}{3} = 6 \text{ tours } {}^2/_3.$$

On aura donc

$$6\ {}^2/_3 = \frac{A}{a}.$$

Choisissant un pignon a de 12 ailes, multiple du dénominateur de la fraction, il viendra

$$6\ {}^2/_3 \times 12 = A,$$

d'où

$$A = 80.$$

Le barillet aura donc 80 dents et le pignon de roue de centre 12 ailes (fig. 33).

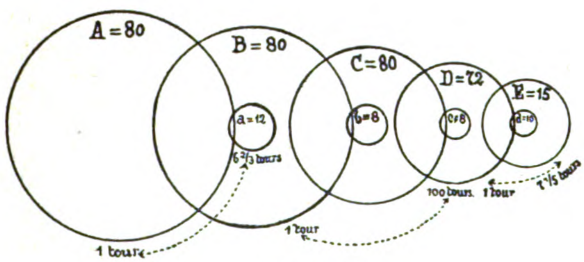


Fig. 33.

La roue de seconde doit ensuite exécuter 100 tours pendant que la roue de centre en fait 1 ; on posera donc

$$100 = \frac{B\ C}{b\ c}.$$

Choisissant des pignons de 8 ailes, on a

$$100 \times 8 \times 8 = BC.$$

Réduisant en facteurs premiers, on obtient ensuite

$$2^8 \times 5^2 = BC.$$

On pourra former les deux groupes :

$$2^4 \times 5 = 80$$
$$2^4 \times 5 = 80.$$

La roue de centre et la roue moyenne devront donc avoir chacune 80 dents et devront engrener dans des pignons de 8 ailes.

Il nous reste à déterminer encore les nombres de dents des roues de seconde et d'échappement, ainsi que le nombre d'ailes du pignon d'échappement ; ces nombres ont à remplir la condition énoncée de ne pas modifier la durée des oscillations du balancier, c'est-à-dire que cette durée doit rester la même que pour une montre à indications duodécimales.

Déterminons en premier lieu le nombre d'oscillations que le balancier devra exécuter pendant un tour de la roue de seconde. En un jour, ce nombre est égal à 24 fois 18000 ; pour un tour de roue de centre, il doit être 20 fois moindre et, pour un tour de la roue de seconde, 100 fois moindre encore, ce qui donne

$$\frac{24 \times 18\,000}{20 \times 100} = 216 \text{ oscillations.}$$

Admettons, comme de coutume, une roue d'échappement de 15 dents ; le nombre de tours que cette roue devra exécuter pendant que la roue de seconde en fait 1, s'obtiendra en divisant 216 oscillations par le double du nombre de dents de la roue d'échappement, donc

$$\frac{216}{2 \times 15} = 7 \text{ tours } {}^1/_5.$$

On posera alors

$$7\,{}^1/_5 = \frac{D}{d}$$

et, en choisissant un nombre d'ailes multiples de 5, 10 par exemple, on aura

$$7\,{}^1/_5 \times 10 = D,$$

ce qui revient à

$$D = 72 \text{ dents.}$$

La roue de seconde pourra avoir 72 dents et le pignon d'échappement 10 ailes.

164. Dans le problème que nous venons de traiter, l'aiguille de seconde ne divisera pas la minute en 100 parties, puisqu'elle exécutera 216 petits sauts pendant un tour.

Nous pourrions nous proposer encore de partager la minute en 100 parties égales, en abandonnant la condition stipulée dans le premier problème, de conserver au balancier la même durée d'oscillation. Au lieu donc de lui faire exécuter 216 oscillations, imaginons de lui en faire effectuer 200.

Avec une roue d'échappement de 15 dents, on arrive à

$$\frac{200}{2 \times 15} = 6 \text{ tours } {}^2/_3$$

exécutés par la roue d'échappement pendant que la roue de seconde en fait 1.

Choisissant un pignon de 9 ailes, on a

$$6\ {}^2/_3 \times 9 = 60 \text{ dents}$$

pour la roue de seconde.

165. Il nous reste à déterminer encore le rouage de la minuterie. Ce problème peut présenter deux cas : savoir celui dans lequel l'aiguille d'heures aurait à exécuter 1 tour par jour et celui dans lequel elle en ferait 2.

Dans le second cas, l'aiguille des minutes fera 10 tours pendant que celle des heures en exécutera 1 ; on écrira donc

$$10 = \frac{A\ B}{a\ b};$$

avec des pignons de 12 ailes chacun, on aura

$$10 \times 12 \times 12 = AB,$$

ou, réduisant en facteurs premiers,

$$2^5 \times 3^2 \times 5 = AB.$$

D'où

$$A = 2^3 \times 5 = 40 \text{ dents}$$
$$B = 2^2 \times 3^2 = 36 \quad »$$

Si l'aiguille d'heures ne doit faire qu'un tour par jour, on a alors

$$20 = \frac{A\ B}{a\ b}.$$

Prenant $b = 10$ et $a = 8$:

$$20 \times 10 \times 8 = AB$$

ou

$$2^6 \times 5^2 = AB.$$

On pourra alors former les deux groupes :

$$A = 2^3 \times 5 = 40$$
$$B = 2^3 \times 5 = 40.$$

Les roues de minuterie et à canon auront dans ce dernier cas chacune 40 dents.

166. **Calcul des nombres composant la denture des roues d'une montre à seconde indépendante.**

Ces montres, que l'on construisait en assez grand nombre il y a quelques années, possèdent généralement deux rouages distincts. Dans ce système, une aiguille spéciale est placée au centre du cadran et fait un seul saut par seconde; elle peut être arrêtée pour un temps indéfini, puis remise en marche à volonté, sans que la montre cesse de marcher. Le deuxième rouage a pour fonction le mouvement de cette aiguille de seconde indépendante; le principe du mécanisme est donc de rendre libre à chaque seconde le rouage actionnant l'aiguille. A cet effet, le dernier pignon du rouage de seconde porte sur son axe un bras appelé *fouet*, engrenant soit directement dans le pignon d'échappement du premier rouage, soit dans une « étoile » ajustée sur l'axe de ce dernier (fig. 34).

Pendant que le fouet est en contact avec une aile du pignon d'échappement, il a un mouvement angulaire peu prononcé et à peine visible sur l'aiguille de seconde. Mais, lorsque l'aile du pignon a avancé jusqu'à un certain point, le fouet devient libre et accomplit rapidement un tour presque complet pour venir s'appuyer à nouveau contre l'aile sui-

vante. A chaque tour du fouet l'aiguille de seconde doit avancer d'une division sur le cadran. Il faut donc qu'à chaque seconde une aile du pignon ou une dent de l'étoile vienne se présenter pour recevoir le fouet.

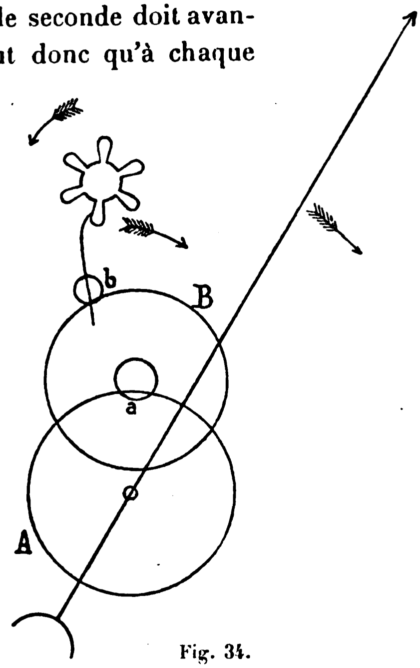


Fig. 34.

Un échappement à ancre ou à cylindre, dont la roue avance à chaque oscillation du balancier de la moitié de l'espace qui sépare deux dents consécutives, peut servir à ce but, si le nombre d'oscillations est de 18 000 par heure, soit 5 par seconde. En effet, une roue de 15 dents produit 30 oscillations et emploie par suite

$$\frac{30}{5} = 6 \text{ secondes}$$

pour faire un tour.

Si l'on fait engrener le fouet directement dans le pignon, ce dernier devra avoir 6 ailes, sinon il faudra fixer une étoile de six dents sur son axe dans laquelle on fera engrener le fouet. Le mouvement s'effectuera alors suivant la demande.

Il y a une remarque à faire pour les montres pourvues d'un échappement à détente ou duplex.

Pendant l'oscillation dans laquelle la roue donne l'impulsion au balancier, cette roue avance d'un angle égal à celui qui sépare deux dents consécutives et, pendant l'oscillation suivante, elle reste à l'état de repos. Chaque dent produit par le fait encore deux oscillations, mais on ne peut alors faire accomplir au balancier 18 000 oscillations par heure. Le fouet devant devenir libre toutes les 5 oscillations et le chiffre 5 étant impair, il se trouverait toutes les deux secondes une oscillation sans impulsion, pendant laquelle le fouet ne pourrait être dégagé. Les montres pourvues de l'un ou de l'autre système d'échappement devront donc, pour être em-

ployées comme seconde indépendante, battre un nombre pair d'oscillations par seconde : 14 400 ou 21 600 par heure, soit 4 ou 6 par seconde.

Si la montre bat 14 400 oscillations, la roue d'échappement avance à chaque seconde de deux dents; l'étoile du pignon devra donc avoir $\frac{15}{2}$ dents; mais, comme on ne peut avoir de demi-dent, on donnera 15 dents à cette pièce, ce qui revient au même.

Si la montre bat 21 600 oscillations, la roue d'échappement avance de 3 dents par seconde; l'étoile devra donc avoir $\frac{15}{3}$ dents, soit 5 ou un multiple de 5.

On peut donner au rouage ordinaire de la montre les nombres de dents employés habituellement.

Pour ce qui concerne les nombres de dents du rouage de seconde, nous remarquons que, puisque la roue de centre porte sur son axe prolongé l'aiguille de seconde, cette roue doit faire un tour pendant que le fouet en fait 60; on doit donc avoir

$$60 = \frac{\mathrm{A\ B}}{a\ b},$$

et, en employant des pignons de 8 et de 6 ailes,

$$60 \times 8 \times 6 = \mathrm{AB},$$

ou, réduisant en facteurs premiers :

$$2^6 \times 3^2 \times 5 = \mathrm{AB}.$$

En groupant ces facteurs, on peut avoir, par exemple,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \\ \mathrm{B} &= 2^4 \times 3 \qquad = 48. \end{aligned}$$

Les autres roues n'ont pas d'autre condition à remplir que celle que le rouage de seconde doive marcher le même nombre d'heures que le rouage ordinaire, généralement 32. Le barillet qui actionne ce rouage, a alors aussi un arrêtage de 4 dents et doit faire un tour en 8 heures, c'est-à-dire

pendant que la roue portant l'aiguille de secondes en fait 8 fois 60, soit 480. On aura donc ici

$$480 = \frac{CDE}{cde}.$$

Choisissant des pignons de 10, 8 et 8 ailes, on a

$$480 \times 10 \times 8 \times 8 = CDE,$$

ou

$$2^{12} \times 3 \times 5^2 = CDE,$$

ce qui donne les trois groupes de facteurs :

$$\begin{aligned} C &= 2^4 \times 5 = 80 \\ D &= 2^6 \qquad\;\; = 64 \\ E &= 2^2 \times 3 \times 5 = 60. \end{aligned}$$

167. Si la montre est à *double tour d'heures*, c'est-à-dire si le cadran est subdivisé en deux petits cadrans dont les aiguilles d'heure et de minute peuvent indiquer deux temps différents, le pignon engrenant dans le barillet du rouage de seconde indépendante porte une aiguille de minute sur le prolongement de son axe, comme le pignon de centre du rouage habituel. Un mécanisme de minuterie est adjoint à chaque rouage et l'on possède ainsi le moyen de faire indiquer à la montre simultanément l'heure de deux contrées différentes. Dans ce cas, la roue qui a D dents, doit faire un tour par heure et pendant que le pignon qui a e ailes portant l'aiguille de seconde en fait 60. Les chiffres précédents réalisent précisément cette condition, puisqu'on a bien

$$60 = \frac{D\,E}{d\,e} = \frac{64 \times 60}{8 \times 8}.$$

168. La disposition des montres dites *à cinquième* ou *à quart de seconde* est semblable à celle des secondes indépendantes, mais on ne peut y construire que des échappements dont la roue avance à chaque oscillation d'une demi-dent, puisque l'étoile qu'on ajuste sur le dernier pignon du rouage de seconde doit devenir libre à chaque oscillation du

balancier. On ne peut donc se servir, dans l'un ou l'autre de ces systèmes, d'échappements à détente ou duplex.

Les montres à cinquième de seconde doivent battre 18 000 oscillations et l'étoile de la roue d'échappement présenter une dent à chaque oscillation ; cette étoile doit donc avoir un nombre de dents double de celui de la roue d'échappement. Comme cette dernière en a généralement 15, l'étoile devra en avoir 30. Au lieu de fouet, on ajuste une autre étoile de 5 dents sur l'axe du dernier pignon du rouage de seconde.

Les montres à quart de seconde doivent battre 14 400 oscillations; l'étoile du pignon d'échappement doit avoir deux fois autant de dents que la roue, et l'étoile du dernier pignon du rouage de seconde doit avoir 4 dents.

Les nombres de dents des autres roues sont les mêmes qu'aux secondes indépendantes simples.

169. Remarquons que ces systèmes sont aujourd'hui démodés et remplacés par les *chronographes*. Ceux-ci sont plus simples à établir et coûtent par conséquent moins cher; ils sont basés sur des principes absolument différents et n'ayant pas de rapport avec le genre de problèmes que nous traitons présentement.

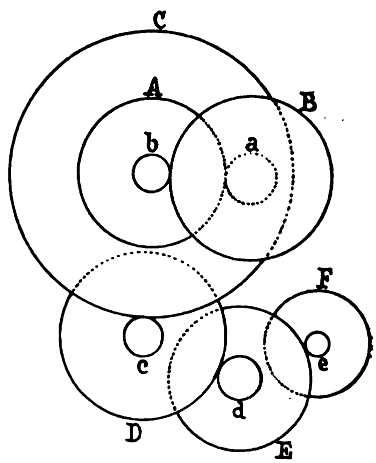


Fig. 35.

170. **Calcul du rouage d'une montre système Roskopf.** — Les montres de ce genre ont un rouage simplifié en ce sens que leur barillet engrène directement dans la roue moyenne. Le mouvement des aiguilles est produit par l'engrenage d'une roue A (fig. 35) concentrique au barillet et d'une chaussée *a* placée sur un tenon fixé au centre du mouvement. La roue A porte en outre un pignon *b*

engrenant dans la roue à canon B. Les roues portant les aiguilles d'heures et de minutes sont donc actionnées directement par le barillet.

Remarquons encore que la roue A et son pignon doivent être ajustés à frottement « gras » sur le barillet, afin que les aiguilles puissent être remises à l'heure.

171. Proposons-nous en premier lieu de calculer le nombre d'oscillations du balancier d'une telle montre, les nombres de dents étant connus.

Soit :

Nombre de dents du barillet	C =	128
» » de la roue moyenne . . .	D =	84
» » de la roue de secondes. .	E =	60
» » de la roue d'échappement	F =	15
Nombre d'ailes des trois pignons	c =	8
	d =	7
	e =	6
Nombre de dents de la roue de minuterie. .	A =	72
» » de la roue à canon . . .	B =	66
Nombre d'ailes de la chaussée.	a =	18
» » du pignon de minuterie. . .	b =	22

La chaussée devant exécuter une rotation pendant une heure, nous obtiendrons le temps d'une rotation du barillet par le quotient:

$$\frac{A}{a} = \frac{72}{18} = 4;$$

le barillet emploie 4 heures pour exécuter un tour sur son axe. Le nombre d'oscillations accomplies par le balancier pendant un tour du barillet, soit pendant 4 heures, sera exprimé par la formule

$$4\,N = \frac{C\,D\,E\,2\,F}{c\,d\,e},$$

et, pendant une heure,

$$N = \frac{C\,D\,E\,F}{2\,c\,d\,e}.$$

Nous aurons par suite :

$$N = \frac{128 \times 84 \times 60 \times 15}{2 \times 8 \times 7 \times 6} = 14400 \text{ oscillations.}$$

Le rouage de la minuterie donnera bien

$$\frac{72 \times 66}{18 \times 22} = 12.$$

172. *Soit maintenant à calculer les nombres de dents du rouage d'une montre Roskopf, sachant que le balancier doit accomplir 16 200 oscillations par heure.*

Admettons, comme dans le cas précédent, que le balancier exécute un tour en quatre heures. Nous aurons

$$16200 = \frac{CDE2F}{4cde}.$$

Choisissant des pignons de 8, 7 et 6 ailes, on écrira

$$16200 \times 2 \times 8 \times 7 \times 6 = CDEF,$$

et, réduisant le premier membre en facteurs premiers,

$$2^8 \times 3^5 \times 5^2 \times 7 = CDEF,$$

avec lesquels nous pourrons former les groupes suivants :

$$C = 2^3 \times 3 \times 5 = 120 \text{ dents:}$$
$$D = 2^2 \times 3 \times 7 = 84 \text{ »}$$
$$E = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \text{ »}$$
$$F = 2 \times 3^2 = 18 \text{ »}$$

Le rouage de minuterie doit donner

$$\frac{AB}{ab} = 12.$$

Choisissant $a = 22$ et $b = 18$, on a

$$AB = 12 \times 22 \times 18$$
$$AB = 2^4 \times 3^3 \times 11;$$

d'où, par exemple,

$$A = 2^3 \times 3^2 = 72 \text{ dents}$$
$$B = 2 \times 3 \times 11 = 66 \text{ »}$$

173. *On demande le nombre de tours qu'on doit faire exécuter à la tige de remontoir, en mettant une montre à l'heure, pour faire tourner d'un tour l'aiguille des minutes.*

Solution. — Admettons pour les roues en action les nombres de dents suivants :

Chaussée	12 ailes.	Roue de minuterie	30 dents.
Grand renvoi. . .	27 dents.	Petit renvoi . . .	18 »
Pignon coulant. .	16 »	(fig. 36).	

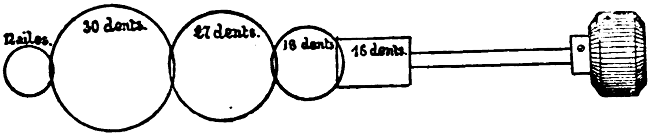


Fig. 36.

Comme il s'agit de déterminer le nombre de tours qu'exécute la tige de remontoir pendant que la chaussée en fait un, il faut donc envisager cette chaussée comme roue conduisante. La roue de minuterie qui est menée par la chaussée, conduit à son tour le grand renvoi; elle est donc pignon par rapport à la chaussée et roue par rapport au renvoi. La même chose a lieu pour le grand et le petit renvoi, qui sont conduits et conduisent également. On devra avoir

$$n = \frac{12 \times 30 \times 27 \times 18}{30 \times 27 \times 18 \times 16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Il faut donc faire exécuter $^3/_4$ de tour à la tige du remontoir pour que l'aiguille des minutes en fasse un.

On voit que le nombre de dents des roues intermédiaires entre la chaussée et le pignon coulant n'influence en rien le résultat et que le mouvement a lieu comme si le pignon engrenait directement dans la chaussée. Nous avons du reste déjà constaté ce fait en traitant le problème 161.

174. *Recherchons encore le nombre de tours qu'on doit faire exécuter à la tige de remontoir pour remonter une montre qui a marché un jour (24 heures).*

Solution. — Il s'agit dans cette question de calculer le nombre de tours que doit faire le pignon de transmission

pendant que le rochet ajusté sur l'arbre de barillet en fait trois.

Admettons les nombres de dents suivants :

Roue de rochet . .	44 dents	Roue de couronne .	42 dents
Roue de couronne, dessous.	38 »	Pignon de transmission	18 »

On aura dans ce cas (fig. 37), et d'une manière analogue à l'exemple précédent :

$$n = 3 \frac{44 \times 38}{42 \times 18} = 6 \frac{40}{63} \text{ tours.}$$

On désire généralement que ce nombre soit le plus élevé possible, car l'effort à produire pour enrouler le ressort de barillet est un travail mécanique déterminé ; on diminuera la force qu'il faut exercer pour remonter la montre en augmentant le chemin parcouru. On voit que le nombre n devient plus grand lorsqu'on augmente le nombre des dents du rochet et de la denture dite « de champ » de la roue de couronne, ou lorsqu'on diminue ceux de la roue de couronne et du pignon de transmission.

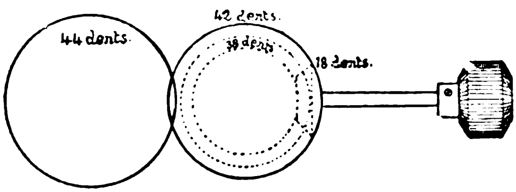


Fig. 37.

175. *Soit à déterminer les nombres de dents des roues et pignons formant le rouage de la sonnerie d'une horloge à quarts devant marcher 8 jours (système à rateau).*

Solution. — Le rouage du mécanisme de sonnerie d'une telle horloge est formé (fig. 38) d'un *barillet* A engrenant dans le pignon *a* d'une *roue intermédiaire* B, qui mène à son tour le pignon *b* de la *roue des chevilles* C engrenant elle-même dans le pignon *c* de la *roue d'arrêt* D, laquelle conduit le pignon *d* de la *roue de délai* E qui actionne enfin le pignon *e* du *volant* V.

Lorsque ce rouage est laissé libre à l'instant où la sonnerie doit s'effectuer, le volant tourne avec une certaine vitesse réglée par la dimension de ses ailes, qui éprouvent de la part de l'air une résistance proportionnelle à leur surface. La vitesse du volant détermine les intervalles entre les coups de la sonnerie. La roue des chevilles porte, comme son nom l'indique, un certain nombre de chevilles équidistantes sur son pourtour ; ces chevilles soulèvent à intervalles réguliers les leviers des marteaux frappant sur les timbres ou les cloches. La roue d'arrêt porte une goupille sur sa serge ; cette cheville s'appuie, lorsque la sonnerie est à l'état de repos, sur une pièce d'arrêt qui maintient le rouage immobile. Au moment de la « préparation », cette pièce est écartée par la minuterie de l'horloge et le rouage exécute un certain mouvement jusqu'à ce qu'une goupille portée par la roue de délai vienne s'appuyer à son tour contre un autre levier, qui s'écarte ensuite lentement jusqu'au déclanchement définitif du rouage, et l'horloge commence à sonner.

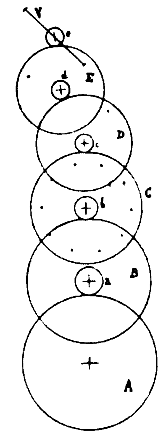


Fig. 38.

Les conditions que doit remplir ce rouage, sont les suivantes :

1° La sonnerie doit naturellement se produire pendant la durée totale de la marche de l'horloge ;

2° La sonnerie (heures ou cadence des quarts) doit s'effectuer à intervalles réguliers, sans précipitation ni trop lentement, de façon à ce que l'on puisse facilement compter les coups,

3° La goupille de la roue de délai doit reprendre toujours la même position d'arrêt, de manière qu'elle ait environ un demi-tour à exécuter au moment de la préparation de la sonnerie.

Cette dernière condition est motivée par la sécurité du fonctionnement et pour éviter l'arcboutement de cette goupille avec la pièce d'arrêt pendant leur mouvement simultané.

Ce fait oblige nécessairement à ce que les nombres de tours des mobiles de ce rouage soient toujours entiers et non fractionnaires, afin que les diverses chevilles reprennent toujours leur même position relative à l'arrêt.

Calculons d'abord le nombre de coups que doit marquer l'horloge pendant douze heures, en ne tenant naturellement pas compte du double coup des quarts (cadence). La somme des douze heures donne :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 12 = 78 \text{ coups}$$

et les quarts

$$(1 + 2 + 3)\,12 = 72 \text{ coups},$$

ensemble donc 150 coups.

Si la roue des chevilles porte dix goupilles, elle exécutera donc 15 tours en douze heures, ou 30 tours en vingt-quatre heures, ou encore 240 tours pendant les huit jours que doit marcher l'horloge.

Admettons que pendant ces huit jours le ressort de barillet puisse se développer de 1,8 tours. Nous aurons

$$\frac{n''}{n} = \frac{AB}{ab} = \frac{240}{1,8} = 50.$$

La roue des chevilles accomplira donc 50 rotations pendant que le barillet en fait une. Choisissant des pignons de 12 et de 10 ailes, on posera

$$50 \times 12 \times 10 = AB,$$

ou, en décomposant ces nombres en facteurs premiers,

$$2^4 \times 3 \times 5^3 = AB,$$

d'où, par exemple,

$$A = 2^4 \times 5 = 80$$
$$B = 3 \times 5^2 = 75.$$

Le barillet aura donc 80 dents et la roue intermédiaire 75.

Pour le calcul des nombres de dents des autres roues, convenons de faire exécuter au volant 90 tours pendant un coup

de la sonnerie; nous aurons en conséquence, pendant un tour de la roue des chevilles, 900 tours du volant et on posera :

$$\frac{n'''}{n} = \frac{CDE}{cde} = 900.$$

Prenons trois pignons de 7 ailes, il viendra

$$900 \times 7 \times 7 \times 7 = CDE$$

ou, décomposant en facteurs premiers,

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 = CDE.$$

On peut obtenir avec ces facteurs les trois groupes

$$\begin{aligned} C &= 2 \times 5 \times 7 = 70 \\ D &= 2 \times 5 \times 7 = 70 \\ E &= 3^2 \times 7 \qquad = 63. \end{aligned}$$

Ces nombres remplissent bien la condition énoncée ci-dessus ; chacun des trois pignons exécutera un nombre entier de tours à chaque coup de la sonnerie et les goupilles des roues d'arrêt et de délai reprendront toujours la même position après chaque indication d'heure ou de quart.

Remarquons que, pour faciliter la mise en place des mobiles de ces rouages, chacune de ces roues est repérée avec la suivante.

Dans les systèmes de sonnerie avec *roue de compte* ou à *chaperon*, le mobile portant la roue de compte doit naturellement exécuter un tour en douze heures ; si cette pièce est portée par la roue intermédiaire, il faut avoir égard à ce fait pour la détermination des nombres de dents de la première section du rouage, comme du nombre des chevilles actionnant les marteaux. Les calculs se font du reste d'une manière identique.

CHAPITRE IV

DES ENGRENAGES

176. **Définition.** — La théorie des engrenages a pour objet l'étude de la transmission du travail mécanique d'une roue à une autre.

177. Supposons d'abord que nous n'ayons qu'une seule roue engrenant dans un pignon et qu'au lieu de la force compliquée du ressort nous ayons un poids P (fig. 39) agissant par l'intermédiaire d'un fil mince et flexible sur un cylindre de rayon égal à l'unité et fixé concentriquement à l'axe de la roue. Admettons de même que la force résistante soit représentée par un poids Q suspendu de la même façon que P à un cylindre ajusté sur l'axe du pignon et de rayon égal à l'unité. En imaginant encore ce système animé d'un mouvement uniforme, l'engrenage sera parfait si, à n'importe quel instant du mouvement, le travail de la force P est égal et de sens contraire au travail de la force Q, le rapport des forces P et Q étant convenablement établi.

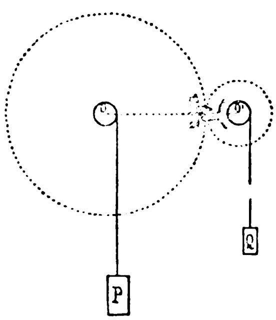


Fig. 39.

Comme ces forces agissent dans la direction même du chemin parcouru par leur point d'application, le travail mécanique effectué a pour mesure le produit de l'intensité de ces forces par le chemin parcouru (39).

Si le rapport des forces P et Q est bien choisi, leur grandeur peut être arbitraire et, en conséquence, on peut les supposer très petites et même les négliger. C'est là la base de cette théorie importante exposée en cinématique.

178. On peut aussi faire abstraction du mouvement et s'attacher plus spécialement à la transmission de la force.

Nous examinerons les engrenages à ce double point de vue.

179. **Examen pratique d'un engrenage.** — Plaçons une roue et un pignon dans un « compas aux engrenages » de façon que les deux mobiles soient suffisamment libres, quoique sans ébat, entre les broches de l'instrument. Réglons l'écartement des deux mobiles jusqu'à ce que le mouvement de la roue produise celui du pignon. Imprimons alors un mouvement rapide à la roue: nous constaterons un bon engrenage si les mobiles conservent suffisamment longtemps ce mouvement et sans autre bruit qu'un certain sifflement aisément reconnaissable. Le mouvement imprimé doit en outre diminuer graduellement et non pas brusquement. Remarquons qu'afin que cette expérience réussisse convenablement, le pignon doit être muni d'une roue faisant l'office de « volant » pour que le mouvement se conserve assez longtemps. On peut examiner un engrenage à ce même point de vue en plaçant les mobiles dans le mouvement de la montre et en procédant d'une manière analogue. On a ainsi constaté si l'engrenage transmet bien le mouvement; examinons maintenant s'il transmet bien la force.

Servons-nous, comme précédemment, du compas aux engrenages et plaçons de même les mobiles entre les broches de l'instrument. Créons ensuite une force résistante agissant sur le pignon et, à cet effet, serrons fortement l'une contre l'autre les broches entre lesquelles est placé le pignon. L'engrenage se trouvera établi dans de bonnes conditions si, en imprimant un mouvement à la roue, on ne sent aucune secousse dans la transmission et qu'on ait seulement la résistance du frottement à vaincre.

Il faut s'assurer aussi du « jeu » existant entre les dents de la roue et les ailes du pignon, ainsi que du « jour » nécessaire entre les pointes des dents et le fond des ailes du pignon.

Lorsque l'engrenage est placé dans le mouvement de la montre, on peut créer une force résistante en appuyant une fine cheville de bois sur l'extrémité d'un des pivots du pignon; en faisant tourner la roue à l'aide d'une autre cheville, on pourra s'assurer comme précédemment des qualités de l'engrenage considéré.

180. Remarquons que, lorsqu'un engrenage transmet bien le mouvement, il transmet également bien la force et que, lorsqu'une des conditions est remplie, l'autre l'est aussi. Il est cependant bon pour un examen attentif de procéder des deux façons, car certains défauts se font sentir plus aisément par l'une que par l'autre des deux méthodes.

181. On constatera que, pour que les expériences précédentes indiquent un bon engrenage, celui-ci doit remplir les trois conditions suivantes:

1° que la distance entre les centres de rotation de la roue et du pignon soit exacte;

2° que la forme des dents et des ailes soit conforme aux profils théoriques;

3° que les rayons totaux de la roue et du pignon correspondent au calcul mathématique.

Nous étudierons séparément chacune de ces trois conditions, qui résument à elles seules toute la théorie mécanique des engrenages.

1° *Distance des centres.*

182. **Rayons primitifs.** — Soit deux roues non dentées O et O′ (fig. 40) se conduisant l'une l'autre par simple adhérence et sans glissement.

Lorsque la roue O a tourné d'un certain angle α en entraînant la roue O′, le point de contact *a* est venu se placer

en b, par exemple; le même point de la roue O est alors parvenu en b', de telle façon que l'on ait

$$arc\ ab = arc\ ab',$$

puisque le mouvement s'est effectué sans glissement.

Nous pouvons écrire:

$$(1) \qquad \frac{\text{angle } aOb}{\text{angle } aO'b'} = \frac{r'}{r} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Pour deux roues ayant un mouvement réciproque, ce rapport est précisément celui des vitesses angulaires (36), constantes lorsque ces roues ou cylindres roulants ont une base circulaire.

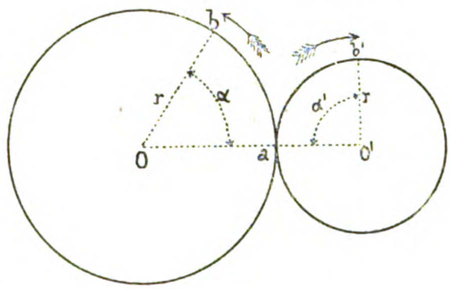


Fig. 40.

De plus, si la roue O a accompli un nombre n de rotations, la roue O′ en a fait un nombre n' et l'on aura le nouveau rapport

$$(2) \qquad \frac{n}{n'} = \frac{r'}{r}.$$

183. Quoique la transmission du travail mécanique par simple adhérence ne soit pas employée en horlogerie, du moins pas d'une manière directe, on en trouve cependant de nombreuses applications dans les travaux du praticien. Dans ces cas, les roues ne sont ordinairement pas en contact, un certain espace les sépare et, pour produire le mouvement d'entraînement de l'une à l'aide de l'autre, on les enveloppe toutes deux soit d'une corde, soit d'une bande de cuir nommée *courroie*.

Telle, par exemple, la corde d'une roue à pied ou à main transmet dans le tour de l'horloger le mouvement soit à un renvoi, soit directement à une poulie montée sur le tour; telle aussi la corde d'un archet transmet le travail méca-

nique, produit par la main qui l'actionne, à la poulie autour de laquelle cette corde s'enroule.

184. Examinons en premier lieu le cas de deux poulies réunies par une corde ou une courroie (fig. 41). Constatons d'abord que, si les deux brins ne se croisent pas, les deux roues tournent dans le même sens; si ceux-ci se croisent (fig. 42), les roues tournent en sens contraires.

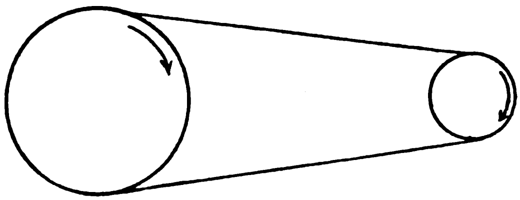


Fig. 41.

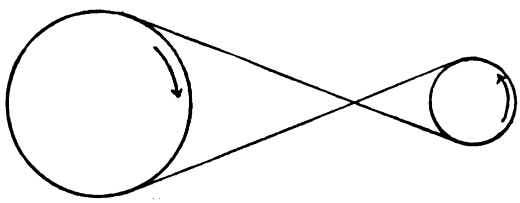


Fig. 42.

L'angle α correspondant à un tour de la première poulie est égal à 2π; pour n tours, il est $2\pi n$.

De même, pour la seconde poulie, l'angle α' est égal à 2π pour 1 tour et à $2\pi n'$ pour n' tours.

On peut donc écrire

$$\frac{2\pi n}{2\pi n'} = \frac{r'}{r} = \frac{n}{n'}.$$

Lorsque n, r et r' sont connus, on a pour n'

$$n' = n\,\frac{r}{r'},$$

et si, comme c'est généralement le cas, n est égal à 1, on a simplement

$$n' = \frac{r}{r'}.$$

Le nombre de tours exécuté par la deuxième poulie pendant que la première en fait 1, est donc égal au rapport des rayons des deux roues.

185. **Applications.** — *Un arbre fait 100 tours à la minute; il est garni d'une poulie dont le diamètre est égal à* 0^m70. *Une courroie transmet son mouvement à une poulie de* 0^m40 *de diamètre placée sur un deuxième arbre. On demande le nombre de tours faits par la deuxième poulie.*

Nous aurions, d'après la relation précédente :

$$n' = \frac{100 \times 0,70}{0,40},$$

puisque

$$n = 100;\ 2r = 0,70 \text{ et } 2r' = 0,40,$$

et, calculs faits:

$$n' = 175 \text{ tours.}$$

Une poulie de 0^m80 *de diamètre exécute 90 tours à la minute, quel doit être le diamètre de la poulie menée, sachant qu'elle devra exécuter 160 tours pendant le même temps?*

La formule

$$\frac{r'}{r} = \frac{n}{n'}$$

peut tout aussi bien s'écrire

$$\frac{2\,r'}{2\,r} = \frac{n}{n'},$$

d'où l'on tire

$$2r' = 2\,r\,\frac{n}{n'};$$

en chiffres,

$$2r' = \frac{0,80 \times 90}{160},$$

et, calculs faits:

$$2r' = 0^m45.$$

186. Il arrive souvent qu'un outil, tel qu'un tour, une fraiseuse ou une perceuse, a besoin de marcher à des vitesses différentes pour satisfaire aux nécessités du travail. On installe alors sur l'arbre menant une poulie multiple, poulie étagée ou cône de vitesse. Sur l'arbre mené se trouve également une poulie semblable, mais tournée en sens contraire. Il faut alors qu'une corde unique puisse se placer sur

les différentes paires de poulies qui correspondent. La somme des rayons de deux poulies correspondantes doit donc être constante.

187. Supposons maintenant le cas d'un tour à pied. La corde de la grande roue est enroulée dans la rainure d'une poulie de renvoi et transmet le mouvement à l'arbre de ce renvoi. Une autre corde est enroulée dans une autre rainure du même renvoi, mais de rayon différent, et transmet le mouvement de l'arbre à la poulie fixée sur le tour. Quel est le rapport du nombre de tours de la première roue à celui de la dernière?

Désignons d'une manière générale par

n le nombre de tours de la grande roue;

n' » » du renvoi;

n'' » » de la poulie du tour;

R le rayon de la grande roue;

R′ » de la petite rainure du renvoi;

r » de la grande rainure du renvoi;

r' » de la petite rainure de la poulie;

r'' » de la grande rainure de la poulie.

Nous avons donc (fig. 43):

$$n' = n \frac{R}{R'},$$

et de même

$$n'' = n' \frac{r}{r'}$$

ou, en remplaçant n' par sa valeur,

$$n'' = n \frac{R}{R'} \times \frac{r}{r'}.$$

Comme, dans ce premier cas, la roue conduit la petite poulie du renvoi et la grande poulie du renvoi la petite poulie du tour, on obtient le plus grand nombre de tours parcouru par l'arbre du tour. Il se meut donc avec sa plus grande vitesse.

Si, par contre, nous conduisions la corde de la grande

roue dans la grande rainure du renvoi, et la seconde corde, enroulée dans la petite rainure du renvoi, dans la grande rainure de la poulie du tour (fig. 44), nous obtiendrions une vitesse moins grande.

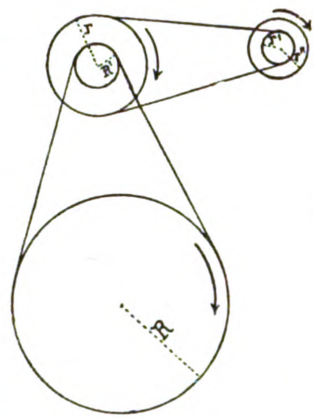


Fig. 43.

Remarquons que, comme c'est un travail mécanique qui doit être transmis, à mesure que la vitesse de la dernière poulie diminue, la force augmente et réciproquement.

Ainsi, lorsqu'on veut tourner une pièce de métal mou, tel que le laiton, on dispose les cordes de manière à obtenir une grande vitesse, à condition, toutefois, que l'objet à tourner soit de petite dimension. Par contre, si l'on a à tourner un métal dur, tel que l'acier trempé, ou un objet de grand diamètre, il convient de disposer les cordes de façon à obtenir peu de vitesse.

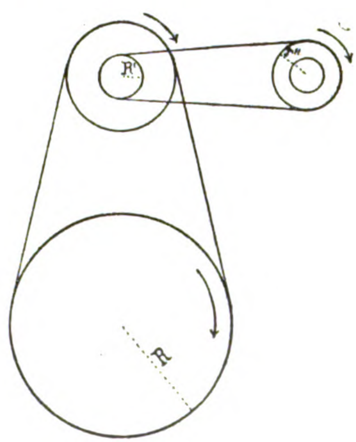


Fig. 44.

Dans le second cas (fig. 44), on a, d'une manière analogue au premier,

$$n'' = n \frac{R}{r} \times \frac{R'}{r''}.$$

188. **Applications numériques.** — Soit

$n = 1$. $R = 400$ mm. $R' = 30$ mm.
$r = 50$ mm. $r' = 20$ mm. $r'' = 40$ mm.

Pour le cas de grande vitesse, on aura

$$n'' = \frac{R \times r}{R' \times r'} = \frac{400 \times 50}{30 \times 20} = 33 \text{ tours } {}^1/_3.$$

En disposant les cordes pour obtenir une petite vitesse, on obtient alors :

$$n'' = \frac{R \times R'}{r \times r''} = \frac{400 \times 30}{50 \times 40} = 6 \text{ tours}.$$

189. La transmission de la force au moyen de roues, ou cylindres roulants, s'entraînant par simple contact, ne peut guère être employée en pratique, car l'adhérence a une limite peu élevée appelée « force du frottement »; passé cette limite, un glissement se produit.

Pour obvier à cet inconvénient, on implante sur la roue des saillies, qui sont les *dents* venant engrener dans des entailles pratiquées dans le pignon. On forme alors ce qu'on a nommé les *ailes* du pignon.

Avec cette disposition, le mouvement des deux roues dentées doit se faire d'une manière identique à celui des cylindres primitivement considérés.

Il suit de là que, dans un engrenage, on peut toujours imaginer deux circonférences se conduisant par simple contact et dans les mêmes conditions de mouvement. Ces circonférences portent le nom de *circonférences primitives*.

190. On appelle *pas de l'engrenage* la longueur d'arc mesurée sur la circonférence primitive d'une des roues, à partir d'un point d'une dent au point similaire de la dent suivante. Le pas de l'engrenage doit donc comprendre l'espace occupé par un plein et un vide d'une dent.

Le pas de l'engrenage de la roue doit être égal à celui du pignon qu'elle conduit. Désignons ce pas par la lettre p et appelons en outre n le nombre de dents de la roue et n' le nombre d'ailes du pignon.

La longueur de la circonférence primitive de la roue, $2\pi r$, doit donc être égale à $p \times n$, puisque le pas doit être compris n fois le long de cette circonférence.

De même la longueur de la circonférence primitive du pignon, $2\pi r'$, doit être égale à pn'.

Afin d'obtenir une relation entre les rayons primitifs et les nombres de dents, divisons l'égalité

$$2\pi r = pn$$

par

$$2\pi r' = pn';$$

on obtiendra

$$\frac{2\pi r}{2\pi r'} = \frac{pn}{pn'},$$

ou, en simplifiant,

$$(3) \qquad \frac{r}{r'} = \frac{n}{n'}.$$

Les rayons primitifs sont donc proportionnels aux nombres de dents.

191. **Calcul des rayons primitifs.** — Dans un *engrenage extérieur*, tel que celui que nous avons envisagé (fig. 39), la distance des centres des deux mobiles est égale à la somme de leurs rayons primitifs, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(4) \qquad D = r + r',$$

D représentant cette distance.

Reprenons la proportion (3):

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

dans laquelle les rayons r et r' sont quantités inconnues et les nombres de dents n et n' quantités connues.

De cette dernière proportion on peut tirer

$$r' = \frac{rn'}{n}$$

et, en remplaçant dans l'égalité (4) r' par cette valeur, on a:

$$D = r + \frac{rn'}{n} = r\left(1 + \frac{n'}{n}\right)$$

ou

$$D = r\,\frac{n + n'}{n}$$

et

$$(5) \qquad r = \frac{D\,n}{n + n'}$$

De même on obtiendrait

$$(6) \qquad r' = \frac{D\,n'}{n + n'}.$$

192. On peut aussi déterminer les valeurs des rayons primitifs d'un engrenage par le raisonnement suivant : ces rayons devant être proportionnels aux nombres de dents des roues, imaginons la ligne des centres D divisée en autant de parties que comporte la somme des nombres de dents des deux roues de l'engrenage, donc en $n + n'$ parties. Une de ces divisions vaudra par conséquent

$$\frac{D}{n + n'}.$$

Le rayon de la roue devra être égal à n divisions, donc

$$r = \frac{D\,n}{n + n'}$$

et le rayon du pignon en vaudra naturellement n', soit

$$r' = \frac{D\,n'}{n + n'}.$$

193. **Application numérique**. — Un barillet de 80 dents doit engrener dans un pignon de 10 ailes, quels doivent être les rayons primitifs des deux mobiles, sachant que leur distance des centres est de 11,565 mm.?

En remplaçant, dans les formules (5) et (6), les lettres par leurs valeurs ci-dessus, on aura :

$$r' = 11{,}565 \times \frac{10}{80 + 10} = \frac{11{,}565 \times 10}{90} = \frac{11{,}565}{9}$$

et

$$r = 11{,}565 \times \frac{80}{80 + 10} = \frac{11{,}565 \times 80}{90} = \frac{11{,}565 \times 8}{9}.$$

Ces deux calculs donnent:

$$r' = 1{,}285 \text{ mm.}$$
$$r = 10{,}28 \text{ mm.}$$

Comme vérification, on doit avoir

$$D = r + r' = 10{,}28 + 1{,}285 = 11{,}565.$$

194. Le cas des engrenages extérieurs est celui qui se présente le plus généralement en pratique. Dans ce système,

nous remarquerons que le mouvement des deux mobiles s'effectue en sens contraires ; lorsque la roue est animée d'un mouvement à droite, le pignon possèdera un mouvement à gauche[1].

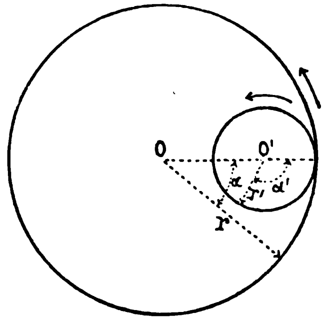


Fig. 45.

195. Lorsqu'on place le centre de rotation du pignon dans l'intérieur de la circonférence de la roue (fig. 45), les engrenages ainsi construits prennent le nom *d'engrenages intérieurs*. Dans ce cas, le pignon acquiert un mouvement dans le même sens que celui de la roue.

La distance des centres est alors égale à la différence des rayons primitifs des deux roues. Donc

$$D = r - r'. \tag{7}$$

Si l'on connaît la distance des centres et les nombres de dents de la roue et du pignon, on peut calculer la valeur de leurs rayons primitifs d'une manière analogue à celle qui nous a servi à déterminer celle des engrenages extérieurs.

Nous avons la proportion (3)

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

d'où

$$r' = \frac{r\,n'}{n}$$

et

$$D = r - \frac{r\,n'}{n} = r\left(1 - \frac{n'}{n}\right)$$

ou encore

$$D = r\left(\frac{n - n'}{n}\right),$$

[1] On est convenu d'appeler mouvement à droite celui qui s'effectue dans le même sens que celui des aiguilles d'une montre, avec le cadran en face.

d'où l'on tire

$$(8) \qquad r = D \frac{n}{n - n'}.$$

D'une manière analogue, on arriverait à

$$(9) \qquad r' = D \frac{n'}{n - n'}.$$

196. **Application numérique**. — Prenons comme exemple numérique celui d'une roue de 120 dents engrenant intérieurement dans un pignon de 14 ailes, la distance des centres étant de 8,75 mm.

L'application des formules (8) et (9) donne:

$$r' = D \frac{n'}{n - n'} = 8,75 \frac{14}{120 - 14} = \frac{8,75 \times 14}{106}$$

et

$$r = D \frac{n}{n - n'} = 8,75 \frac{120}{120 - 14} = \frac{8,75 \times 120}{106};$$

calculs faits, on arrive à

$$r' = 1,156 \text{ mm},$$
$$r = 9,906 \text{ mm}.$$

La vérification doit toujours donner

$$D = r - r' = 9,906 - 1,156 = 8,75.$$

197. Examinons encore un genre d'engrenage quelquefois employé et que l'on nomme *engrenage à crémaillère*. Dans ce cas, la circonférence primitive de la roue devient une ligne droite; son rayon est par conséquent infini et le nombre de ses dents illimité. Cet engrenage peut aussi bien être considéré comme extérieur que comme intérieur, car la distance des centres peut également être

$$D = \infty + r' = \infty - r' = \infty.$$

Pour déterminer le rayon primitif du pignon engrenant dans la crémaillère, il suffit de connaître le nombre de ses dents et le pas de l'engrenage.

Soit (fig. 46) ab le pas d'un de ces engrenages et posons

$$ab = A;$$

appelons n' le nombre d'ailes que doit avoir le pignon; la circonférence primitive aura alors pour valeur:

$$2\pi r' = An',$$

ce qui donne

$$r' = \frac{An'}{2\pi}. \qquad (10)$$

198. **Exemple numérique.** — Soit 2,8 mm. le pas d'un engrenage à crémaillère, le pignon devant avoir 12 ailes, quel doit être son rayon primitif?

La formule (10) donne

$$r' = \frac{An'}{2\pi} = \frac{2,8 \times 12}{2 \times 3,1416} = \frac{2,8 \times 6}{3,1416} = 5,347 \text{ mm.}$$

Le rayon demandé doit donc être

$$r' = 5,347 \text{ mm.}$$

199. **Application de la théorie des rayons primitifs aux échappements.** — La théorie des engrenages ne trouve pas seulement son application dans les rouages, mais encore chaque fois qu'il s'agit de la transmission de mouvements de rotation autour de deux axes fixes. Elle peut donc être appliquée dans des cas spéciaux tels qu'on en rencontre dans l'étude des échappements, des mécanismes de répétition, etc.

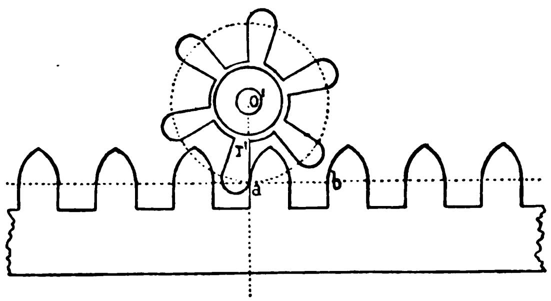


Fig. 46.

Il arrive parfois, et surtout dans ces derniers cas, que l'on connaisse la distance des centres de rotation et le rapport des *angles* parcourus dans le même temps par les mobiles considérés et que l'on ait à déterminer leurs rayons primitifs dans le but de rechercher la forme des surfaces en contact.

La formule (1) nous donne la proportion

$$\frac{r}{r'} = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

qui indique que les rayons primitifs sont inversement proportionnels aux angles parcourus en temps égaux quelconques.

De plus on doit avoir, lorsque les rotations des deux mobiles ont lieu en sens contraires,

$$D = r + r',$$

et, lorsqu'elles ont lieu dans le même sens,

$$D = r - r'.$$

En effectuant des opérations identiques à celles que nous avons indiquées (191), on arrive aux résultats suivants :

Engrenage extérieur :

$$(11) \qquad r = D \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'}$$

et

$$(12) \qquad r' = D \frac{\alpha}{\alpha + \alpha'}.$$

Engrenage intérieur :

$$(13) \qquad r = D \frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'}$$

et

$$(14) \qquad r' = D \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'}.$$

200. **Exemple numérique.** — Soit à rechercher les rayons primitifs d'une roue d'échappement et de l'ancre, sachant que, pendant que la roue parcourt un angle de $10° = \alpha$, l'ancre tourne d'un angle de $9° = \alpha'$. Soit en outre la distance des centres $D = 100$ mm.

Remarquons que, la roue étant animée d'un mouvement à droite, l'ancre possède un mouvement à gauche lorsque la dent agit sur le levier de sortie, et un mouvement à droite lorsqu'elle agit sur le levier d'entrée. Le premier cas est donc celui d'un engrenage extérieur, tandis que le second est assimilable à celui d'un engrenage intérieur.

Les formules (11) et (12) nous donneront :

$$r = D \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} = 100 \frac{9}{10 + 9} = 100 \frac{9}{19} = 47 \, {}^{7}/_{19}$$

et

$$r' = D \frac{\alpha}{\alpha + \alpha'} = 100 \frac{10}{10 + 9} = 100 \frac{10}{19} = 52 \, {}^{12}/_{19}.$$

Les formules (13) et (14) nous donneront ensuite

$$r = D \frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'} = 100 \frac{9}{10 - 9} = 100 \times 9 = 900$$

et

$$r' = D \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'} = 100 \frac{10}{10 - 9} = 100 \times 10 = 1000.$$

2° *Forme des dents et des ailes.*

201. **Etude générale de la transmission de la force dans les engrenages.** — Dans le chapitre des forces motrices, nous avons comparé l'énergie déployée par un ressort moteur à l'effet produit par un poids placé à l'extrémité d'un bras de levier égal à l'unité de distance, le système étant en équilibre (85).

Ce poids fictif F représente le *moment de la force* par rapport à l'axe autour duquel cette force exerce son action.

Au moyen de l'engrenage, cette action est transmise au deuxième axe et le problème actuel consiste à rechercher le moment F′ d'une force qui, par rapport au second axe, ferait équilibre au moment F.

202. Supposons d'abord que le point de contact de la dent de la roue avec l'aile du pignon se trouve sur la ligne des centres (fig. 47), et envisageons la roue O comme un levier à l'état d'équilibre. Ce système remplit en effet toutes les conditions relatives au levier : le point d'appui est O, la puissance F ; la résistance est celle qui provient de la roue O′ et dont nous avons à rechercher le moment.

Cette résistance est appliquée au point de contact *c* de la dent de la roue et de l'aile du pignon ; elle est dirigée *normalement* aux surfaces en contact ; ici perpendiculairement à

la ligne des centres et par conséquent suivant c N. Elle agit ainsi en sens contraire de la force F.

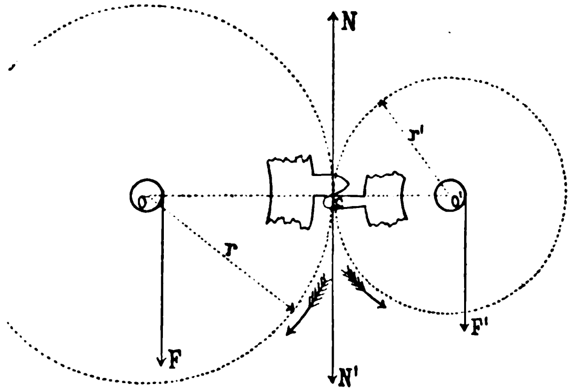


Fig. 47.

Le bras de levier (46) de la force N est $Oc = r$, son moment est donc

$$N \times r,$$

et, à cause de l'équilibre, on doit avoir (46) :

$$(15) \qquad F = Nr,$$

puisque le bras de levier de la force F est égal à l'unité.

D'autre part, le pignon est sollicité par deux forces, l'une F′, qui est le moment résistant à déterminer; l'autre N′ provenant de la dent de la roue O et dirigée, de même que la force N, dans le sens de la normale commune au point de contact.

Puisque le pignon est, aussi bien que la roue, à l'état d'équilibre, on aura d'une manière analogue l'égalité des moments :

$$(16) \qquad F' = N' \, r'$$

En divisant les équations (15) et (16) membre à membre, on a

$$\frac{F}{F'} = \frac{N \, r}{N' r'}.$$

Les forces normales N et N′ sont égales, puisque leurs effets se détruisent; en conséquence on obtient simplement

$$(17) \qquad \frac{F}{F'} = \frac{r}{r'},$$

d'où l'on tire la valeur cherchée

$$(18) \qquad F' = F\frac{r'}{r}.$$

A cause de la proportion (3) :

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

on peut encore écrire

$$(19) \qquad F' = F\frac{n'}{n}.$$

203. Si, par exemple, le moment de F est égal à 4000 gr., le nombre de dents de la roue $n = 80$ et le nombre d'ailes du pignon $n' = 10$, la formule (19) deviendrait

$$F' = 4000\,\frac{10}{80} = 500 \text{ gr.}$$

Un poids de 500 gr. suspendu à l'extrémité d'un bras de levier de 1 mm. du centre du pignon ferait donc équilibre à un poids de 4000 gr. suspendu à la même distance du centre de la roue.

Remarquons à ce propos que, si la force a diminué pendant sa transmission et n'est plus, par rapport au pignon, que la huitième partie de ce qu'elle était par rapport à la roue, la vitesse du dernier mobile est par contre augmentée et devenue huit fois plus considérable.

204. En supposant que le calcul précédent se rapporte à l'engrenage d'un barillet avec le pignon de centre, recherchons maintenant le moment F″ de la force qu'il faudrait appliquer à la roue moyenne pour faire équilibre au moment F de la force du ressort de barillet.

Nous avons vu, dans le cas précédent, qu'en multipliant le moment F par le rapport $\frac{n'}{n}$, on obtient le moment de la force

appliquée à la roue de centre; en multipliant donc cette dernière valeur par le rapport $\frac{n''}{n_1}$ du nombre d'ailes du pignon de moyenne au nombre de dents de la roue de centre, on obtiendra la valeur cherchée, soit

$$(20) \qquad F'' = F \frac{n' \; n''}{n \; n_1}.$$

205. On pourrait continuer ce raisonnement pour un nombre quelconque de roues. Ainsi, le moment F^{IV} qu'il faut appliquer à la roue d'échappement pour faire équilibre au moment de la force du ressort, sera exprimé par

$$(21) \qquad F^{IV} = F \frac{n' \; n'' \; n''' \; n''''}{n \; n_1 \; n_2 \; n_3}.$$

206. Choisissons comme exemple numérique le cas très fréquent :

$$F^{IV} = 4000 \frac{10 \times 10 \times 10 \times 7}{80 \times 80 \times 75 \times 70} = \frac{5}{6} \text{ gr.}$$

La force est devenue 4800 fois plus faible, mais la vitesse du dernier mobile est 4800 fois plus considérable. — Ce qui, en mécanique, se perd en force, se gagne en vitesse et réciproquement.

207. Nous venons d'étudier la transmission du moment de la force d'une roue à une autre, en admettant le point de contact des mobiles sur la ligne des centres.

Examinons maintenant dans quelle condition ce point de contact peut se trouver en dehors de cette ligne, de manière que *le moment de force transmis conserve à chaque instant la même valeur que celle qu'il possède lorsque le contact a lieu sur la ligne des centres.*

Autrement dit, la question consiste à former les dents et les ailes de façon que la transmission de la force soit constante. Il faut donc que dans n'importe quelle position du mouvement la valeur donnée par la formule (19),

$$F' = F \frac{n'}{n},$$

reste la même.

208. Supposons que la dent de la roue et l'aile du pignon soient formées de telle façon qu'en un instant du mouvement leur contact se trouve au point c (fig. 48), situé en dehors de la ligne des centres. Recherchons dans cette position quelconque la valeur du poids F′ qui ferait équilibre au poids F, ces deux forces étant placées à l'unité de distance des axes.

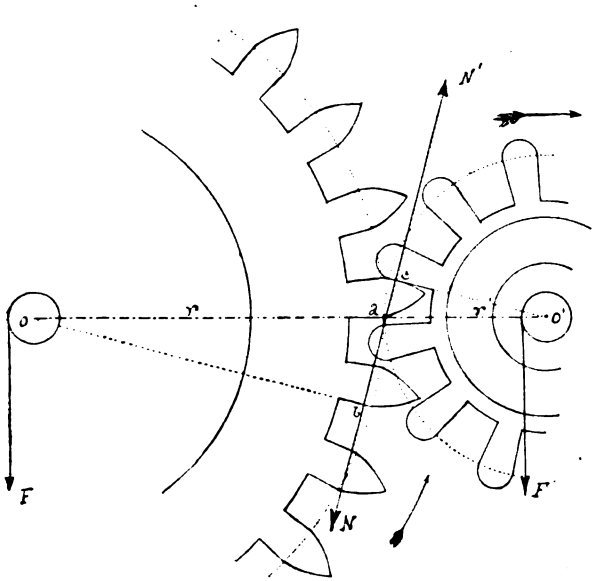


Fig. 48.

La normale au point c, suivant laquelle s'exercent les actions réciproques de la dent sur l'aile et de l'aile sur la dent, est nécessairement normale à la fois à la courbe de la dent et à la forme de l'aile, puisque ces deux lignes sont tangentes en ce point; elle est dirigée suivant la droite NN′.

Comme dans le cas précédent, les deux roues peuvent être assimilées à des leviers. La roue O est en effet sollicitée par deux forces : l'une F, tendant à lui imprimer un mouvement à gauche; son moment est $F \times 1$, soit F; l'autre N, dirigée en sens opposé, provient de la réaction de l'aile du pignon; son bras de levier étant la perpendiculaire Ob, son moment est

$$N \times Ob.$$

A cause de l'équilibre, on aura (46)

$$F = N \times Ob. \quad (22)$$

Le pignon est également sollicité par deux forces; l'une F′, dont le moment est F′; l'autre, provenant de la pression

que la dent exerce sur l'aile au point c suivant la direction normale c N', a pour moment

$$N' \times O'c.$$

Comme le sens de cette dernière force est inverse de celui de F', l'équilibre est produit par l'égalité des moments:

$$(23) \qquad F' = N' \times O'c.$$

Divisant l'équation (22) par (23), on a

$$\frac{F}{F'} = \frac{N.\,O\,b}{N'.\,O'c}.$$

Comme l'équilibre existe dans le système, il faut que les forces N et N', qui ont même alignement, soient égales; on a par suite en simplifiant:

$$\frac{F}{F'} = \frac{O\,b}{O'c}.$$

Les deux triangles Oba et $O'c'a$ sont semblables; leurs côtés homologues donnent la proportion

$$\frac{O\,b}{O'c} = \frac{r}{r'};$$

mais comme (3)

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

on aura aussi

$$\frac{Ob}{O'c} = \frac{n}{n'}.$$

Par suite,

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'},$$

d'où l'on tire la valeur

$$F' = F\,\frac{n'}{n}.$$

209. Cette valeur de F' est donc identique à celle que nous avons déterminée dans le cas précédent et la force transmise d'une roue à l'autre restera constante si la normale commune au point de contact de la dent et de l'aile passe,

dans n'importe quelle position du mouvement, par le point de tangence des circonférences primitives.

210. En résumé, nous pouvons déduire de la démonstration précédente la règle suivante, qui est la base de la détermination des formes de contact des dents et des ailes :

Pour que la transmission de la force par les engrenages demeure constante, il faut que les surfaces frottantes des dentures soient formées par des courbes telles qu'à un instant quelconque du mouvement la normale commune au point de contact passe toujours par un même point de la ligne des centres, lequel est le point de tangence des circonférences primitives.

211. Il résulte de cette loi que, lorsque le contact a lieu sur la ligne des centres, ce point se confond avec le point de tangence des circonférences primitives.

212. Remarquons que, si la normale coupe la droite OO′ entre les points O et O′, l'engrenage est extérieur et le mouvement des deux mobiles a lieu en sens contraires.

Si la normale coupe la droite OO′ en dehors des points O et O′, l'engrenage est intérieur et le mouvement des deux roues a lieu dans le même sens.

Si la normale coupe la droite OO′ par le point O′, le rayon r' devient nul et on a :

$$F' = F\frac{0}{r} = 0\,;$$

la transmission du mouvement et de la force est impossible.

Si, par contre, la normale coupe la droite OO′ par le point O, on a dans ce cas $r = 0$ et par suite :

$$F' = F\frac{r'}{0} = \infty\,;$$

la force F′ devient infiniment grande, mais la transmission du mouvement est tout aussi impossible, puisque la circonférence primitive de la roue s'annule.

Si, enfin, la normale était parallèle à la droite OO′, on aurait alors :

$$F' = F\frac{\infty}{\infty} = F.$$

Ce cas pourrait se présenter à la levée d'entrée de l'échappement à ancre, lorsque la roue d'échappement doit parcourir le même angle *a* que l'ancre qu'elle conduit ; on a ainsi (200) :

$$r = D\frac{a}{a-a} = r' = D\frac{a}{a-a} = D\frac{a}{0} = \infty;$$

les rayons primitifs sont alors infinis.

213. La loi que nous avons formulée (210), fait comprendre dès maintenant que le problème qui a pour objet la recherche des formes des dents et des ailes, est susceptible d'une grande variété de solutions, car on peut donner à la denture de l'une des roues une forme quelconque et rechercher pour les dents de l'autre roue une courbe telle qu'elle satisfasse, par ses contacts successifs avec la première, à la condition énoncée. Cependant, les lois de la résistance des matériaux, l'usure des surfaces frottantes, les inflexions des courbes, sont autant de causes qui font pratiquement rejeter l'emploi de nombre d'entre elles.

214. Remarquons encore que la formule $F' = F\frac{n'}{n}$ est indépendante de la valeur absolue des rayons primitifs r et r' et ne dépend par conséquent que du rapport de leurs circonférences primitives.

Détermination des formes de contact dans les engrenages.

215. Il y a plusieurs méthodes servant à la détermination des surfaces frottantes des dents et des ailes ; la base de ces diverses constructions repose généralement sur la loi que nous avons énoncée (210). Nous exposerons ici quatre d'entre elles.

216. 1° **Méthode graphique.** *Engrenage extérieur.* — La condition fondamentale, que la normale commune au point de contact des deux formes qui se conduisent, doit constamment passer par le point de tangence des circonférences pri-

mitives, fournit un moyen graphique facile pour déterminer l'une des courbes, lorsque l'autre est donnée.

Soient (fig. 49) O et O′ les circonférences primitives d'un engrenage et AB la courbe donnée du pignon dans une position quelconque.

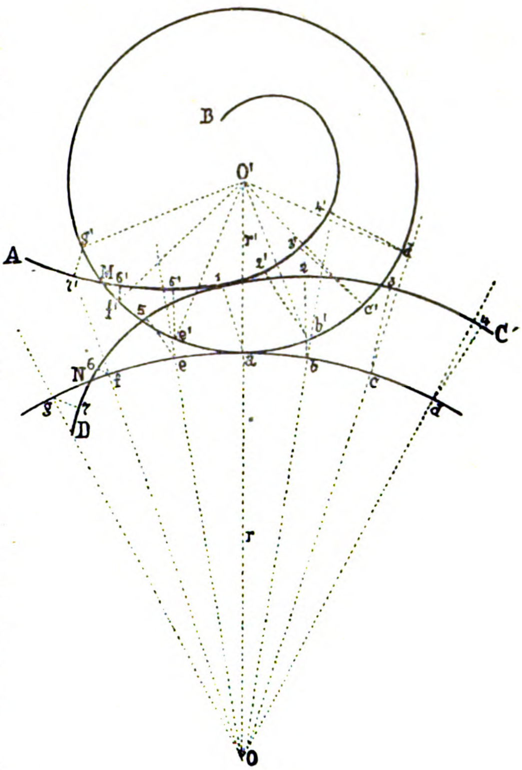


Fig. 49.

Si du point de tangence a nous menons une normale à cette courbe, nous aurons ainsi le point de contact 1 de l'aile du pignon et de la dent de la roue correspondant à la position tracée.

Remarquons que, dans cette position, la normale a 1 forme le même angle avec le rayon r' du pignon que celui qu'elle forme avec le prolongement du rayon r de la roue, puisque ces deux lignes se confondent.

Marquons ensuite sur chaque circonférence primitive les points b et b', déterminés de facon que l'on ait

$$\text{arc } a\,b = \text{arc } ab'.$$

Par les points b et b', menons les rayons Ob et O′b', en prolongeant suffisamment le premier au delà de la circonférence de la roue ; du point b', traçons la normale à la courbe b' 2′, puis portons du point b comme sommet un angle égal à 2′ b' O′ et indiquons le point 2 en faisant b 2 égal à b' 2′. Le point 2 appartient à la courbe cherchée, car si les points b et b' viennent prendre la position a, les rayons O′ b' et O b auront le même alignement et les points 2 et 2′ la même position.

On peut ainsi déterminer autant de points que l'on veut, et, en les reliant ensemble par une courbe continue, on obtiendra une forme telle que DC, possédant la propriété de pouvoir conduire la courbe AB de telle façon que la transmission du mouvement soit uniforme.

Si l'on conduit la courbe AB de façon que le point M, qui appartient à la fois à cette courbe et à la circonférence primitive du pignon, vienne se présenter à la place du point *a*, le point N, qui appartient à la courbe cherchée et à la circonférence primitive de la roue, devra entrer en contact avec le point M.

Il suit de là que l'on a :

$$\text{arc } a\,\text{M} = \text{arc } a\,\text{N},$$

et aussi que, lorsque le contact a lieu sur la ligne des centres, il se trouve au point de tangence des circonférences primitives.

217. *Engrenage intérieur.* — Pour un engrenage intérieur, on détermine la courbe de contact de la même façon que pour un engrenage extérieur.

On décrit les circonférences primitives O et O′ tangentes au point *a* (fig. 50) et la courbe donnée AB, que nous supposerons être de nouveau celle du pignon. En menant du point *a* la normale à la courbe, on détermine le point de contact 1 correspondant à la position donnée.

Indiquons ensuite sur les deux circonférences des arcs égaux $a\,b$ et $a\,b'$, $a\,c$ et $a\,c'$, etc., puis reportons les angles que forment les normales $b'\,2'$, $c'\,3'$, etc., avec les rayons $b'\,\text{O}'$, $c'\,\text{O}'$, etc., aux points b, c, etc.

Faisant ensuite $b\,2 = b'\,2'$, $c\,3 = c'\,3'$, etc., nous déterminons les points 2, 3, etc., appartenant à la courbe cherchée.

La seule différence de ce tracé avec le précédent réside donc dans le fait que, pour l'engrenage extérieur, on porte les angles $2'\,b'\,\text{O}'$, $3'\,c'\,\text{O}'$, etc., sur le prolongement des rayons $\text{O}\,b$, $\text{O}\,c$, etc., de la roue, tandis que pour l'engrenage intérieur on porte ces angles contre les rayons eux-mêmes.

Comme on peut choisir arbitrairement l'une des deux courbes et rechercher l'autre, on comprend que le problème

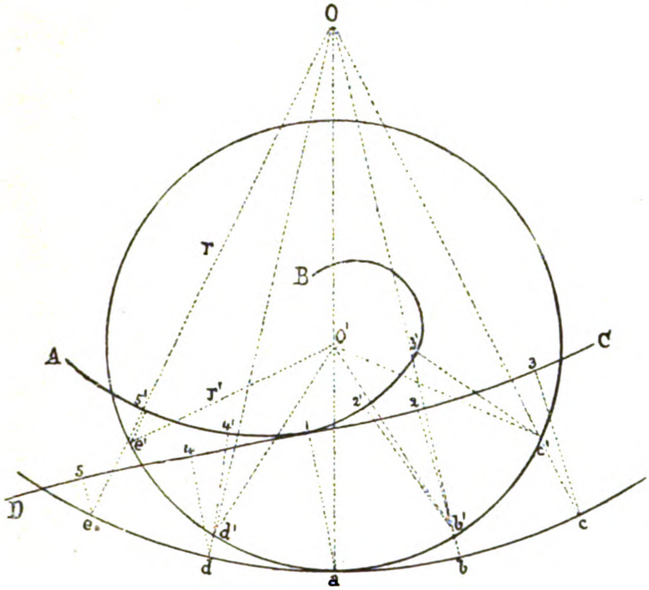


Fig. 50.

comporte une infinité de solutions ; faisons remarquer cependant que nombre d'entre elles présentent des inconvénients et même des impossibilités d'exécution pratique.

218. **2° Méthode de Reuleaux** (d'après Reuleaux, *Le Constructeur.*) — Soit donné *a b c d e f g.... i j k* le profil choisi, A et B les circonférences primitives des deux roues dont les centres respectifs sont O et O′ (fig. 51).

On mène les normales *a* 6, *b* 5, *c* 4,.... 2 *h*, 3 *i*, 4 *j*, 5 *k* au profil donné. Par les points *a*, *b*, *c*, *d*.... *i*, *j*, *k*, on fait passer des arcs de cercle décrits de O′ comme centre. De S, point de tangence des circonférences primitives, comme centre, avec les longueurs *a* 6, *b* 5, *c* 4,.... 4 *j*, 5 *k* (normales), on décrit des arcs de cercle qui détermineront les intersections VI, V, IV, III, II, I, I_1, II_1, III_1, IV_1. Cette série de points reliés entre eux fournit la *ligne d'engrènement* (lieu des points de contact). Cela fait, du point O comme

centre, on décrit des arcs de cercle passant par les points I, II, III,... I_1, II_1, III_1.... Les longueurs d'arcs S 1, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, prises sur A, seront reportées sur B et détermineront les longueurs d'arcs correspondantes S 1_1, $1_1 2_1$, $2_1 3_1$, $3_1 4_1$, $4_1 5_1$ (centres instantanés de rotation). Si, de ces der-

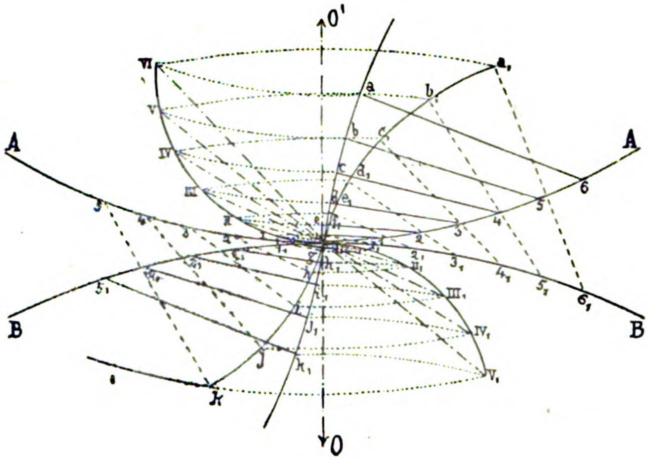


Fig. 51.

niers, on reporte les longueurs de normales $a_1 6_1 = a b$, $b_1 5_1 = b 5$, $c_1 4_1 = c 4$, etc., et qu'on les relie par une courbe continue, on aura le profil cherché a_1, $b_1 c_1$,.... $i_1 j_1$, k_1.

219. **3° Méthode des enveloppes.** — Habituellement, les centres de rotation des deux roues sont fixes et les mobiles tournent autour de ces points.

Supposons cependant que l'on ait imprimé à tout le système un mouvement de rotation autour de l'un des centres, celui de la roue, par exemple, et que ce mouvement s'exécute de telle façon que sa vitesse angulaire soit égale, mais de sens contraire, à la vitesse angulaire animant la roue O. Il est évident que, de cette façon, la roue demeure à l'état de repos et que le fonctionnement de cet engrenage restera le même que si les deux centres étaient fixes et que si les deux roues tournaient simplement autour de leurs centres respectifs.

L'engrenage de la roue de secondes avec le pignon d'échap-

pement dans les pièces dites à « tourbillon » offre un exemple de ce mouvement. La roue est vissée sur la platine de la montre ; son mouvement est donc nul par rapport à cette platine. Le pignon d'échappement, pivoté dans une cage mobile, tourne autour de son centre et simultanément avec la cage, dont le centre de rotation est aussi le centre de la roue de secondes.

Le principe de la méthode des enveloppes repose sur ce genre de mouvement.

Adoptons, en effet, une forme quelconque d'aile; en représentant le pignon dans diverses positions successives de son mouvement autour de la roue, nous obtiendrons la forme de la dent en réunissant, par une courbe tangente, les diverses positions qu'occupera l'aile pendant ce mouvement,

On peut donc dire que la dent est « l'enveloppe » des différentes positions occupées successivement par l'aile pendant le mouvement du pignon autour du centre de la roue. De cette façon, la dent reste constamment en contact avec l'aile et la transmission de la force s'effectuera sans perte. Le mouvement de la roue étant uniforme, celui du pignon le deviendra par suite aussi.

Prenons quelques exemples.

220. La section transversale de l'aile du pignon d'un *engrenage à lanterne* est un cercle dont le centre est situé sur la circonférence primitive : soit à déterminer la forme de la dent.

Si (fig. 52) la circonférence passant par les points 0, 1″, 2″, 3″,..... est la circonférence primitive de la roue et O′, A B celle du pignon, et si cette dernière se meut sans glisser autour de la circonférence primitive de la roue, les centres successifs du pignon occuperont tour à tour les points 0′, 1′, 2′, 3′,....... En figurant alors les positions correspondantes de l'aile du pignon, dont les centres doivent occuper les positions 0, 1, 2, 3,....., et en menant la courbe *a*, *b*, *c*, *d*,.... tangente à l'aile dans ses diverses positions, on obtiendra la courbe cherchée de la dent.

On voit que si l'aile du pignon se réduisait à un point, la forme de la dent serait une *épicycloïde* dont le cercle générateur serait le cercle primitif du pignon. Si l'aile est formée par un fuseau cylindrique, la courbe qui en résulte pour la dent, est parallèle à cette épicycloïde et s'en trouve éloignée d'une longueur égale au rayon du fuseau.

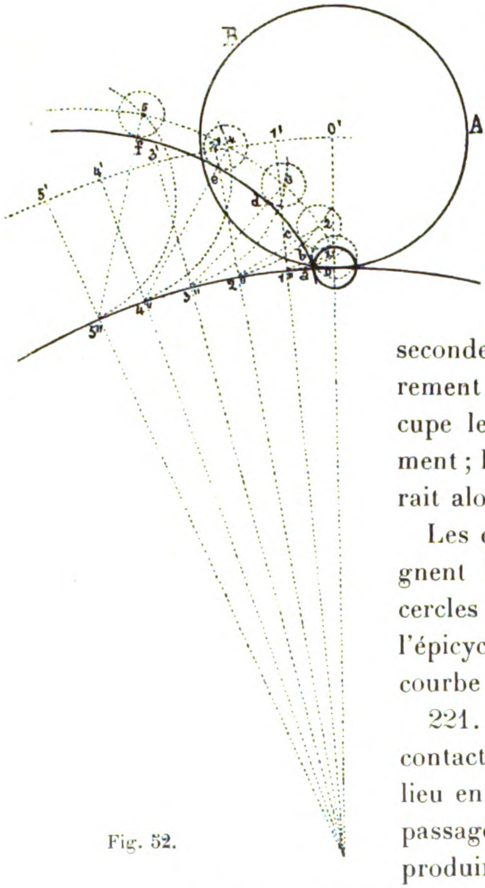


Fig. 52.

On pourrait mener une seconde courbe tangente extérieurement aux diverses positions qu'occupe le fuseau pendant le mouvement ; la courbe ainsi formée conduirait alors le fuseau par sa concavité.

Les droites 1″ 1, 2″ 2,...., qui joignent les points de tangence des cercles primitifs au point décrivant l'épicycloïde, sont normales à la courbe en ces points.

221. La fig. 53 montre que, si le contact de la dent avec l'aile avait lieu en un point tel que *c*, avant le passage de la ligne des centres, il se produirait un arcboutement qui, s'il n'empêchait absolument la transmission du mouvement, modifierait toutefois considérablement la transmission uniforme de la force.

On sait, en effet, que la normale, au point de contact, doit passer par le point de tangence *t* des circonférences primitives ; or, on reconnaît que cette condition essentielle n'est pas remplie dans ce cas, puisque la normale vient couper la ligne des centres en un point *b*. Au lieu donc d'être (208)

$$F' = F\,\frac{r'}{r},$$

le moment de la force transmise ne sera plus exprimé que par la valeur

$$F' = F \frac{O'b}{Ob},$$

abstraction faite des frottements. On reconnaît ainsi que dans l'engrenage à lanterne le contact de la dent et de l'aile doit commencer très près de la ligne des centres[1] et que la conduite s'effectue par conséquent presque entièrement après le passage de cette ligne.

Remarque. — Si la normale passait par le centre O′ du pignon, le mouvement deviendrait impossible; si elle passait au delà de O′, le pignon tournerait en sens contraire du mouvement indiqué par la flèche et l'engrenage deviendrait par le fait « intérieur ».

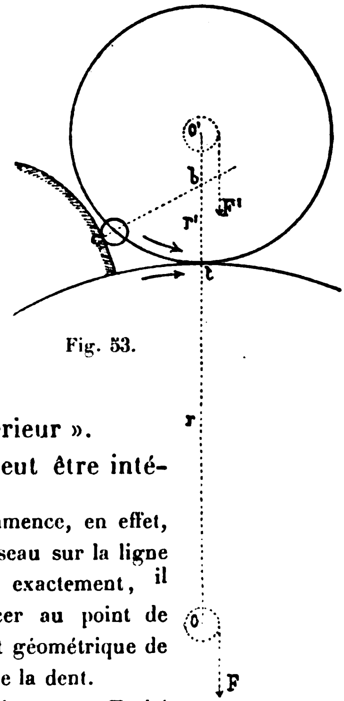


Fig. 53.

222. L'engrenage à lanterne peut être inté-

[1] Le contact de la dent avec l'aile commence, en effet, un peu après le passage du centre du fuseau sur la ligne des centres; exactement, il doit commencer au point de rebroussement géométrique de l'épicycloïde de la dent.

Belanger, dans son Traité de cinématique, indique, à ce sujet, ce qui suit:

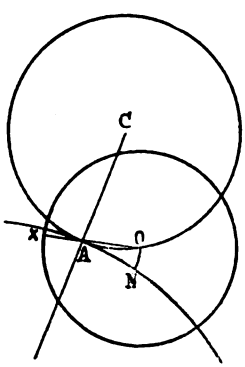


Fig. 54.

On peut déterminer très approximativement la distance entre la ligne des centres et le point de rebroussement, origine du profil de la dent, à l'instant où commence le contact de cette dent et du fuseau. Soit X (fig. 54) le point de rebroussement à cet instant. La normale en ce point, commune à la dent et au fuseau, passe au point de contact A des cercles primitifs et au centre O du fuseau. La distance OX est tout à la fois le rayon du fuseau et le rayon de courbure de l'épicycloïde NO au point O; désignons-la donc par ρ.

rieur et permet alors deux dispositions, suivant que la roue intérieure ou pignon porte les fuseaux et l'autre les dents, ou que la grande roue porte les fuseaux et le pignon les dents.

223. Soit encore, comme deuxième exemple d'application de cette construction, la droite AB donnée comme forme d'aile du pignon et soit à déterminer la courbe de la dent de la roue (fig. 55).

Pendant le mouvement de la circonférence primitive du pignon autour de celle de la roue, la droite A B occupera successivement les positions A′ B′, A″ B″, A‴ B‴, etc. Des points de tangence 1, 2, 3, 4, etc., abaissons respectivement les perpendiculaires à ces droites et, par les points *a*, *b*, *c*, *d*, ainsi obtenus, faisons passer une tangente aux positions successives de la droite AB; nous obtiendrons alors la forme de la dent.

Remarquons que, si la roue est animée d'un mouvement à droite, la position A^{iv} B^{iv} peut devenir impossible pour la transmission du mouvement, par la raison que la roue pourrait alors tourner sans conduire le pignon. Ceci nous montre encore qu'il existe des limites au delà desquelles la

La distance AO est celle qui, dans la formule citée dans le texte,

$$\rho = n + \frac{n\,R'}{R' + 2\,R},$$

est désignée par *n*, et la distance AX, égale à $\rho - n$, est à très peu près la distance cherchée, parce que l'angle de XO avec la ligne des centres diffère très peu d'un angle droit (si dans la figure il en diffère sensiblement, ce n'est que parce que la grandeur OX du rayon du fuseau y est exagérée pour éviter la confusion des lignes). Or, la formule précédente donne :

$$\frac{\rho - n}{R'} = \frac{n}{R' + 2\,R} = \frac{\rho}{2\,R' + 2\,R}, \text{ d'où } \frac{\rho - n}{\rho} = \frac{R'}{2\,R' + 2\,R}.$$

Tel est le rapport de la distance AX cherchée au rayon ρ du fuseau.

Suivant qu'on fait

$$\frac{R'}{R} = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ \infty,$$

on trouve :

$$\frac{\rho - n}{\rho} = \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{5}, \ldots\ \frac{1}{2}.$$

menée du pignon par la roue devient pratiquement impossible.

224. Lorsque la ligne AB passe par le centre du pignon, la courbe de la dent est une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon égal à la moitié du cercle primitif du pignon.

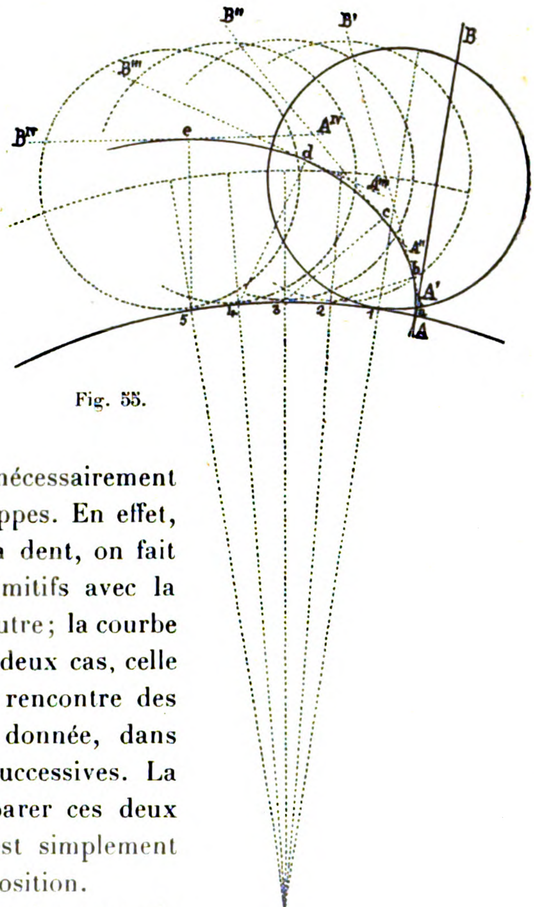


Fig. 55.

225. *Remarque.* — En comparant entre elles les méthodes de détermination des formes de contact que nous venons d'examiner, on peut se rendre compte que la méthode graphique (216) est nécessairement analogue à celle des enveloppes. En effet, pour obtenir la forme de la dent, on fait rouler l'un des cercles primitifs avec la forme donnée, autour de l'autre; la courbe cherchée est donc, dans les deux cas, celle qui passe par le point de rencontre des normales avec la courbe donnée, dans chacune de ses positions successives. La raison qui nous a fait séparer ces deux parties d'un même tout, est simplement la plus grande clarté d'exposition.

226. Prenons comme dernier exemple celui des *engrenages à développantes de cercle.*

La « développante » d'une courbe est une autre courbe, telle que C C′ C″ C‴..., engendrée par un point d'une tangente à la première courbe, dont le contact change continuellement, de telle façon que la distance du point décrivant au point de contact soit constamment égale à l'espace parcouru par ce point de contact sur la courbe. Ainsi (fig. 56), B′ C′,

B″ C″,.... étant des positions de la tangente, on doit avoir : B′ C′ = B′ C ; B″C″ = B″C ; etc.

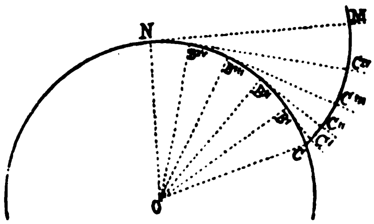


Fig. 56.

La courbe C B′ B″..., sur laquelle roule la tangente, est la *développée* de C C′ C″....

Le point C où la développée rencontre sa développante, est l'*origine*.

227. Pour les engrenages à *développantes de cercle*, on adopte pour dent mobile la développante d'un cercle quelconque concentrique et intérieur au cercle primitif de l'une des deux roues. Le profil de la dent correspondante pour l'autre roue se détermine alors d'une manière fort simple.

Soit donnée la développante D′ D′ du cercle E′ E′ (fig. 57) ; pour déterminer le point de contact M de cette courbe et de la forme cherchée, menons la normale A A′ du point de tangence des circonférences primitives ; par construction, cette normale est en même temps tangente au cercle « développé » E′ E′. Or, si des centres O et O′ nous abaissons des perpendiculaires O B et O′ B′ sur cette normale, nous obtiendrons deux triangles semblables pour lesquels les côtés homologues sont dans le même rapport. Mais les côtés *a* O, *a* O′ et O′ B′ sont constants comme étant des rayons de cercles invariables ; il faut donc que OB le soit aussi. Par conséquent, la normale A A′ de la courbe D D cherchée reste toujours à la même distance du centre O et elle enveloppe par suite un cercle E E concentrique, intérieur au cercle primitif de la roue et dont le rayon se trouve avec celui de E′ E′ dans le même rapport que ceux des cercles primitifs eux-mêmes. *La forme de la dent est donc une autre développante de cercle.*

Le point de contact se trouvant en un instant quelconque sur la ligne A A′, cette droite en est le lieu géométrique.

Ainsi, *dans l'engrenage à développantes de cercle, le lieu des points de contact est la tangente commune aux deux*

cercles de construction. La normale commune conserve donc une position fixe dans l'espace pendant le mouvement des deux roues autour de leurs centres respectifs.

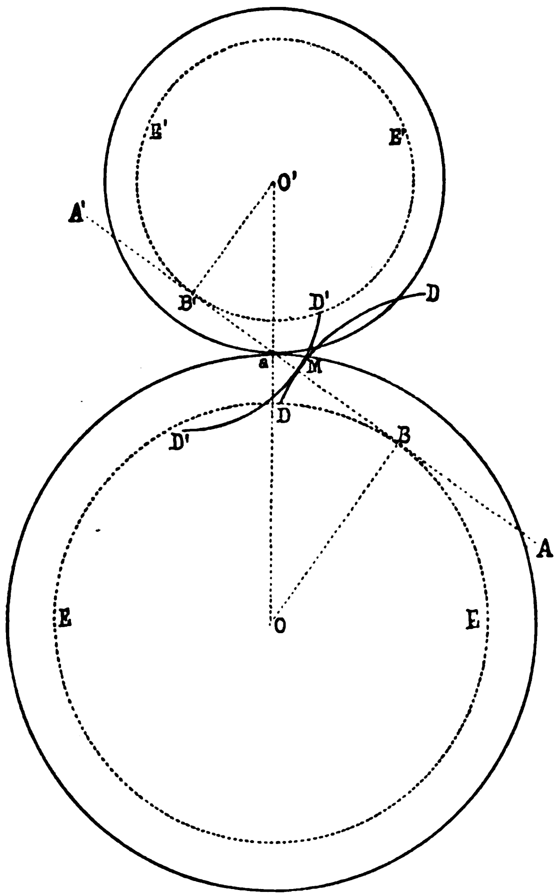


Fig. 57.

Cette droite peut faire un angle quelconque avec la ligne des centres ; l'usage est cependant généralement admis de les placer à 75° l'une de l'autre (parfois 74° 30′).

Les avantages spéciaux à ce système d'engrenage sont d'abord que les deux roues étant semblables et les dents ne présentant pas de changement de courbure au passage de la

ligne des centres, une dent quelconque conduira l'autre avant comme après la ligne des centres. De plus, la construction d'une roue ne dépendant nullement de celle qu'elle doit conduire, toutes les roues à développantes peuvent engrener ensemble ; le rapport des vitesses qu'elles prendront est seul à considérer. C'est une propriété précieuse, qui permet à une seule roue motrice d'en conduire à la fois plusieurs autres, ou encore de faire engrener successivement diverses roues entre elles, comme c'est le cas dans les tours à fileter. Un autre avantage à considérer est aussi que la distance des centres peut varier entre certaines limites, sans que la régularité de l'engrenage en souffre.

L'engrenage à développantes peut être intérieur ; la forme des dents, au lieu d'être convexe, est alors concave. Ce fait est un inconvénient qui rend cette combinaison peu fréquente. On peut, dans ces cas, diminuer la concavité en multipliant suffisamment le nombre des dents.

228. 4° **Méthode des roulettes.** — Le principe de cette méthode diffère des précédents, mais est tout aussi général.

Imaginons d'abord un polygone quelconque A B C D E F G (fig. 58), astreint à rouler sans glisser le long d'une ligne X Y. En un certain moment du mouvement, l'un des angles A, par exemple, se trouvera en contact avec la ligne X Y. Pendant le roulement autour de ce point, tous les points du polygone et avec eux tous ceux qui, intérieurement ou extérieurement, pourraient être invariablement reliés avec lui, décriront des arcs de cercle autour de ce centre A. Tel, par exemple, le point H, extérieur au polygone, mais invariablement lié avec lui, décrira un arc *a b* pendant l'instant du roulement considéré.

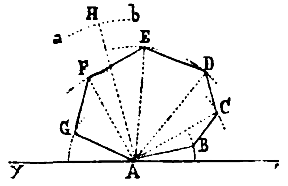


Fig. 58.

Les rayons de ces divers arcs de cercle seront leurs normales et passeront nécessairement par le point A.

Remarquons que la longueur des arcs décrits dépend de

celle de leurs rayons et du nombre de côtés que comprend le polygone. Si nous supposons cette figure géométrique formée d'un plus grand nombre de côtés, la longueurs des arcs décrits, pendant qu'elle tourne autour d'une de ses arêtes, diminuera. A la limite, c'est-à-dire lorsque le nombre des côtés devient infini, le polygone se confond avec une ligne courbe, fermée, et chacun des points qui la composent décrira néanmoins, pendant le roulement autour d'un point instantané de contact, un arc de cercle infiniment court. Mais, si petit qu'il soit, cet arc n'en possède pas moins deux rayons extrêmes, infiniment rapprochés l'un de l'autre et passant par le *centre instantané de rotation*. Puisqu'ils sont infiniment rapprochés, l'un quelconque de ces rayons de courbure est par suite normal au point considéré de la courbe totale décrite par ce point pendant le roulement continu de la forme *génératrice* le long de la ligne *directrice*.

Ceci posé, soit encore (fig. 59) une courbe quelconque *a b c*, que nous ferons rouler à l'extérieur de la circonférence primitive d'une roue et à l'intérieur de celle du pignon. Si, pour plus de clarté, nous supposons qu'un point H pris en dehors de cette courbe lui soit lié d'une manière invariable, le mouvement de ce point sera semblable à celui de tous les points composant la courbe donnée.

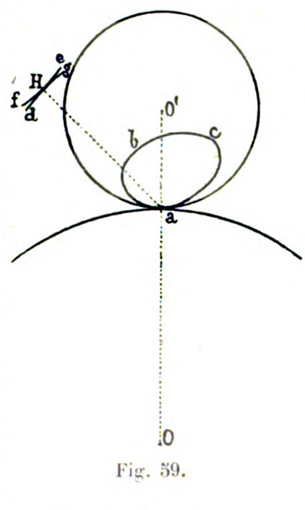


Fig. 59.

Pendant une certaine période du mouvement de la courbe à l'extérieur du cercle primitif de la roue O, ce point H décrira une trajectoire *d* H *g*, puis, lorsque le mouvement a lieu à l'intérieur du cercle primitif du pignon O′, sa trajectoire sera la ligne *f* H *e*. On peut adopter ces deux courbes comme profils de dents conjuguées. En effet, imaginons que la courbe *a b c* suive le mouvement des deux circonférences primitives, de

façon que ces trois courbes restent constamment tangentes en a. Les trajectoires se rencontrent en H, puisque ce point les décrit toutes deux ; de plus elles y sont tangentes, puisque la normale s'obtient, pour chacune d'elles, en joignant le point décrivant H au point de contact a de la courbe mobile $a\,b\,c$ avec l'une et l'autre des circonférences primitives fixes.

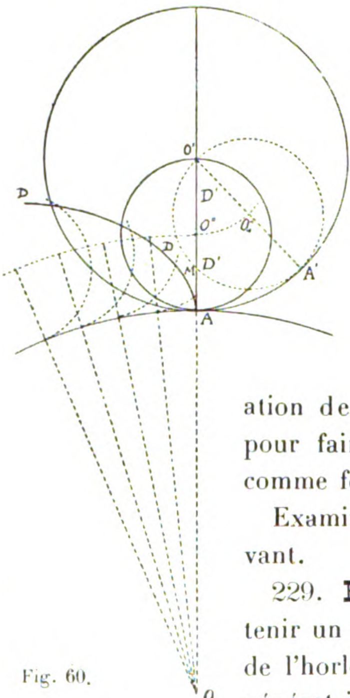


Fig. 60.

Par conséquent, la normale commune des dents, en leur point de contact, passe par le point de tangence des circonférences primitives et la vérification de ce fait suffit, nous le savons, pour faire adopter les courbes obtenues comme formes de dents.

Examinons à ce point de vue le cas suivant.

229. **Engrenages à flancs.** — Pour obtenir un profil très usité dans la pratique de l'horlogerie, on choisit comme forme génératrice la circonférence qui a pour diamètre le rayon de l'un des cercles primitifs, et on prend le point décrivant sur sa circonférence (fig. 60).

Dans le mouvement du cercle générateur autour du cercle primitif de la roue, le point A décrit un arc d'« épicycloïde » A D.

Dans son mouvement à l'intérieur du cercle primitif du pignon, ce même point A décrit une droite O′A qui est un rayon du cercle O′. Cette surface O′ A s'appelle un *flanc*.

Remarquons que l'épicycloïde, qui forme le profil de la dent dans les engrenages à flancs, n'est pas la même que celle que nous avons déterminée pour les engrenages à lanterne (220). Dans ce cas, elle est engendrée par un point d'un cercle de rayon moitié moindre que celui du cercle primitif

du pignon et, dans le premier, cette courbe est engendrée par un point de la circonférence primitive elle-même.

230. Nous allons maintenant prouver que, *dans le roulement, à l'intérieur du cercle de rayon double, le point mobile parcourt un diamètre.*

Si l'on représente, en effet, une position quelconque O''_1 du cercle mobile pendant son mouvement dans l'intérieur de la circonférence primitive du pignon, l'angle inscrit A′O′M a pour mesure la moitié du rapport de l'arc A′ M compris entre ses côtés au rayon $\frac{1}{2}$ A′O′, c'est-à-dire $\frac{A'M}{A'O'}$.

On peut, d'autre part, le mesurer comme angle au centre du cercle O′ par le rapport de l'arc compris A′A au rayon A′O′, donc $\frac{A'A}{A'O'}$.

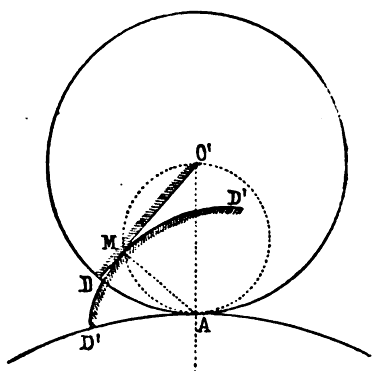


Fig. 61.

Or, si l'énoncé du théorème est vrai, c'est-à-dire si le point A du cercle générateur se transporte en M le long de la droite A O′, les deux angles A′O′M et A′O′A doivent être égaux et se superposer ; nous devrions alors avoir l'égalité des mesures :

$$\frac{A'M}{A'O'} = \frac{A'A}{A'O'}.$$

L'arc A′M est égal, en effet, à l'arc A′A, puisque le roulement du cercle générateur s'effectue sans glissement ; les deux rapports sont donc égaux et le point M se trouve par conséquent sur le rayon A O′.

Comme il s'agit d'un instant quelconque du mouvement, ce point ne quitte donc pas le diamètre AO′, qui est bien la trajectoire cherchée.

231. Si l'on figure le flanc dans une position quelconque O′D (fig. 61), son point de contact M s'obtiendra en lui menant la perpendiculaire A M. L'angle A M O′ étant droit, le

diamètre diffère le moins possible des rayons des roues de la série.

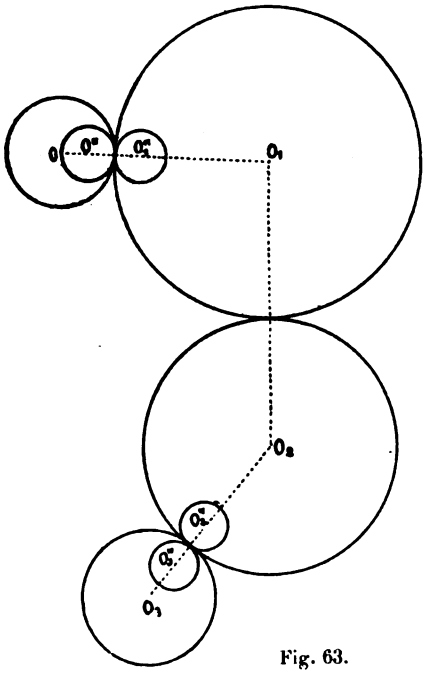


Fig. 63.

On rencontre en horlogerie un exemple de ce cas dans les engrenages de la minuterie et de la mise à l'heure. La chaussée conduit la roue de minuterie dans laquelle vient aussi engrener le grand renvoi, lequel conduit à son tour le petit renvoi (173).

Un mouvement inverse se produit lorsqu'on remet les aiguilles de la montre à l'heure et c'est alors le petit renvoi qui conduit les autres roues.

On peut dans ce cas prendre le cercle O″ moitié du cercle primitif de la chaussée, comme forme génératrice des épicycloïdes extérieures des roues, et faire rouler ensuite ce même cercle générateur dans l'intérieur de chacune des circonférences primitives considérées, afin d'obtenir la forme intérieure des dents; cette forme est alors une *hypocycloïde* (fig. 63).

En pratique, on substitue assez souvent des droites à ces hypocycloïdes et on obtient ainsi un tracé général rappelant celui des engrenages à flancs, quoique incorrect au point de vue de sa construction.

Denture.

236. Jusqu'à présent, nous nous sommes occupés uniquement de la détermination des courbes, ou profils de contact, par lesquelles les dents se conduisent mutuellement, sans préciser les points où elles se terminent. Le moment est venu

d'étudier les détails relatifs à la distribution des dents sur leurs roues.

Au point de vue géométrique, une seule dent pourrait, à la rigueur, suffire pour la transmission du mouvement; mais, en pratique, il en résulterait des enchevêtrements et des impossibités matérielles, indépendamment d'obstacles tout aussi sérieux provenant du frottement. On munit donc les roues de plusieurs dents et il est, dès lors, naturel de les faire toutes identiques.

Chaque dent a deux profils. A la rigueur, la face postérieure pourrait être laissée quelconque; telles sont, par exemple, les dents dites « de loup », de quelques engrenages de remontoirs. Il arrive pourtant assez fréquemment, en mécanique, que tantôt une roue mène l'autre et tantôt elle obéit à son impulsion; parfois aussi le mouvement a lieu dans les deux sens. Il convient donc de construire les deux faces pareilles. La dent est alors *symétrique* par rapport à un rayon du cercle primitif qui en est en quelque sorte la *bissectrice*.

Les dents étant identiques et leur nombre entier, elles partagent donc la circonférence primitive en un certain nombre de parties égales entre elles, que l'on appelle le *pas* de l'engrenage (190). Ce pas se subdivise lui-même en trois parties, le *plein*, le *vide* et le *jeu*. Le plein est l'espace mesuré sur le cercle primitif et occupé par la matière de la roue; le vide est l'excédent devant rester libre pour permettre l'introduction de la dent conjuguée; le jeu est un vide accessoire qui ne semble pas d'abord nécessaire au point de vue géométrique, mais qui, en réalité, est indispensable.

De nombreuses causes rendent le jeu nécessaire au fonctionnement des engrenages: ainsi, l'imperfection de la division des roues par la machine, les ébats nécessaires aux pivots dans leurs trous, la dilatation des corps dont sont formés les mobiles, l'introduction inévitable de corps étrangers dans les dentures.

237. On peut dire que le jeu est le rapport de l'arc non

occupé par la somme des largeurs de la dent et de l'aile au pas de l'engrenage.

Si nous représentons par p le pas de l'engrenage, par a la longueur d'arc occupée par la dent sur la circonférence primitive et par b la longueur occupée sur cette même circonférence par la dent correspondante de l'autre roue, le jeu j sera exprimé par la formule :

$$j = \frac{p - a - b}{p}.$$

Si, par exemple, nous avions pour un cas donné

$$p = 6 \text{ mm.},\ a = 2{,}8 \text{ et } b = 2{,}8,$$

on obtiendrait pour le jeu de l'engrenage :

$$j = \frac{6 - 2{,}8 - 2{,}8}{6} = \frac{1}{15}.$$

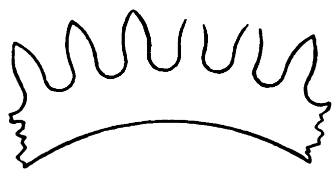
238. Pour déterminer la quantité de jeu nécessaire à un engrenage, on a deux conditions à examiner : d'abord la solidité de la denture et ensuite l'espace réservé pour les corpuscules étrangers, tels que la poussière ou les particules qui se détachent inévitablement des surfaces frottantes par suite de l'usure. Selon le genre d'engrenage, l'une ou l'autre de ces conditions peut avoir la prédominance dans la construction.

Ainsi, pour les engrenages de remontoirs, de la mise à l'heure, de la crémaillère d'une répétition, etc., la condition inhérente à la solidité de la denture doit évidemment prédominer. Dans l'engrenage de la roue de seconde avec le pignon d'échappement, il faut nécessairement réserver la place des corps étrangers.

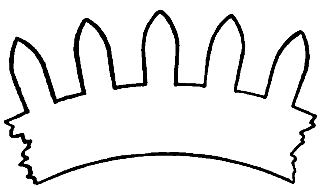
Les deux mêmes conditions doivent également nous guider pour le choix de la forme à donner à la partie de la denture qui forme ce qu'on nomme le *fond* des dents. Ainsi, lorsqu'on désire une denture solide, on choisit de préférence le fond arrondi, comme fig. 64. Si, au contraire, on veut construire une denture laissant place aux corps étrangers, on adoptera

une forme telle que l'indique la fig. 65 ; dans ce dernier cas, on peut aussi faire l'engrenage à lanterne.

239. Dans les engrenages des mécanismes de remontoir, des renvois de minuterie, etc., on prélève le jeu à parties égales sur les deux roues ; dans les engrenages du rouage de la montre, on le prélève sur l'aile du pignon seulement, pour la raison que ce dernier mobile est exécuté en acier trempé et offre par conséquent plus de résistance que le laiton dont est faite la roue. La solidité de l'aile est encore augmentée par sa plus grande longueur transversale.


Fig. 64.

Une autre raison qui fait prélever le jeu sur l'aile, est aussi que les roues conduisent généralement les pignons, que par conséquent c'est le profil de la dent qui conduit le flanc de l'aile après la ligne des centres. Il faut donc que la courbe de la dent ait une longueur suffisante pour pouvoir conduire le flanc assez loin et qu'autant que possible la dent suivante n'ait pas besoin d'entrer en contact avant la ligne des centres. Ceci n'est cependant pas toujours réalisable pour les pignons de bas nombres.


Fig. 65.

240. Pour les mobiles du rouage, la règle généralement adoptée est de donner pour la roue la moitié du pas à la dent et l'autre moitié au vide. Les pignons de 6, 7, 8, 9 et 10 ailes auront alors un tiers du pas affecté à l'aile et les deux tiers au vide. Aux pignons de 12 ailes et plus on donnera les deux-cinquièmes du pas pour la largeur de l'aile et les trois-cinquièmes pour le vide.

Ainsi les engrenages avec pignons de 10 ailes et au-dessous ont un jeu de

$$j = \frac{6 - {}^1/_2 . 6 - {}^1/_3 . 6}{6} = \frac{7 - {}^1/_2 . 7 - {}^1/_3 . 7}{7} = \text{etc.} = \frac{1}{6}$$

et les pignons de 12 ailes et au-dessus

$$j = \frac{12 - {}^1/_2 . 12 - {}^2/_5 . 12}{12} = \text{etc.} = \frac{1}{10}$$

241. Pour les engrenages de renvois, on peut admettre $^1/_{15}$ de jeu.

242. Pour ceux du mécanisme de remontoir, on peut se contenter de $^1/_{20}$ de jeu.

3° *Diamètres totaux.*

243. Avant d'entrer dans les détails relatifs à la détermination des diamètres totaux des mobiles d'un engrenage, nous commencerons par l'étude géométrique des courbes employées dans les engrenages d'horlogerie. La principale d'entre elles est, nous le savons, l'*épicycloïde*. Comme avant-propos à cette question, établissons d'abord la théorie de la *cycloïde*.

Cycloïde.

244. **Définition.** — La cycloïde est une courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle qui roule sans glisser le long d'une ligne droite.

Cette courbe est employée dans les engrenages à crémaillère (197), qui établissent une liaison entre une translation uniforme et une rotation uniforme autour d'un axe perpendiculaire à la translation. C'est donc le cas particulier des engrenages autour de deux axes parallèles dans lesquels l'un des cercles primitifs, ayant son rayon infini, devient une ligne droite.

245. **Tracé de la cycloïde.** — Soit à décrire par points la cycloïde engendrée par le point A d'un cercle de diamètre D (fig. 66).

On trace une droite A A′ égale à la base π D de la cycloïde. On décrit le cercle O de diamètre D tangent au point A à la droite A A′. On divise la circonférence génératrice et la base

en un même nombre de parties égales, 12 par exemple, que l'on numérote de la manière indiquée par la figure. Par le point

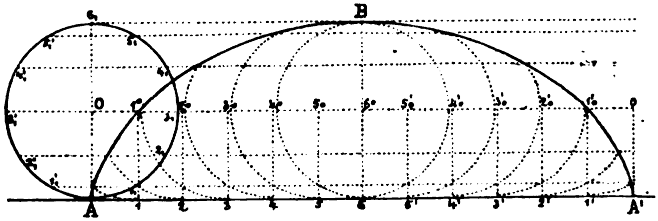


Fig. 66.

du centre O, on mène une droite parallèle à la base; cette droite contiendra les lieux successifs parcourus par le centre du cercle générateur pendant son roulement. Indiquons sur cette parallèle les positions du centre O, correspondant aux positions du cercle lorsqu'il est en contact avec la base aux points de division, et, de chacun de ces centres, décrivons des circonférences de diamètre égal à celui du cercle générateur.

Remarquons que, lorsque le cercle générateur est parvenu au centre 1_0, le point 1_1 de sa circonférence s'est abaissé jusqu'en 1 et le point A, dont le mouvement décrit la cycloïde, doit s'être élevé à une hauteur égale à celle dont le point 1_1 s'est abaissé.

Ainsi, dans cette nouvelle position, le point A doit se trouver sur la circonférence dont le centre est en 1_0 et, en plus, sur une parallèle à la base passant par 1_1.

De la même façon nous pouvons déterminer les positions successives occupées par le point A pendant que le centre du cercle générateur se trouve en 2_0, 3_0, 4_0, etc., et, en réunissant tous les points ainsi obtenus par une ligne continue, on obtient la cycloïde A B A′ cherchée.

246. **Tracé de la cycloïde d'un mouvement continu.** — On comprend que le cercle O étant un plateau circulaire sur la circonférence duquel est fixée une pointe ou un crayon A (fig. 66), si l'on fait tourner sans glisser le plateau le long

d'une règle droite dont l'arête coïncide avec A A′, la pointe ou le crayon A décrira la cycloïde d'un mouvement continu.

247. **Normale et tangente à la cycloïde.** — Soit M un point quelconque sur la cycloïde AMB (fig. 67), par lequel il s'agit de mener une normale, puis une tangente. Ayant tracé la base A A′ et sa parallèle E E′ contenant les lieux occupés successivement par les centres du cercle générateur pendant le roulement, nous trouverons le centre O du cercle générateur correspondant au point M de la cycloïde, en traçant du point M, avec une ouverture de compas égale au rayon du cercle générateur, un arc de cercle passant par la ligne E E′. Le point d'intersection O sera le centre du cercle générateur.

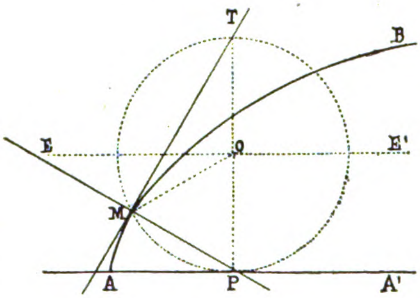


Fig. 67.

Abaissons du point O une perpendiculaire sur la base A A′; le point P sera le centre instantané de rotation du cercle générateur. Son mouvement se compose d'un mouvement de translation parallèle à la base et d'un mouvement de rotation autour de son centre O. Le point P étant ainsi le centre de ce mouvement combiné, le point M décrira un arc de cercle infiniment petit autour de ce centre instantané; la droite M P étant le rayon de cet arc sera par suite la normale cherchée au point M. La tangente, étant perpendiculaire à la normale, doit passer par le point T du cercle générateur ; on sait, en effet, que tout angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.

248. **Développée et rayon de courbure de la cycloïde.** — La développée A'_1A de la demi-cycloïde AB est une demi-cycloïde égale à sa développante (226).

Soit A A′ la base (fig. 68), B*f* l'axe de la cycloïde engendrée par le point M de la circonférence TMP. Décrivons une circonférence sur le diamètre PP′ = TP; par le point P′ me-

nons E F parallèle à AA′; enfin tirons les droites M M′, M T et M′ P′. Par suite de l'égalité des angles M P T et P′ P M′, les deux triangles rectangles P M T et P M′ P′ sont aussi égaux et l'on a

$$M'P = PM,$$

d'où

$$MM' = 2\,PM$$

La droite M M′ est le *rayon de courbure* du point M, c'est-à-dire le rayon de la circonférence qui a deux éléments

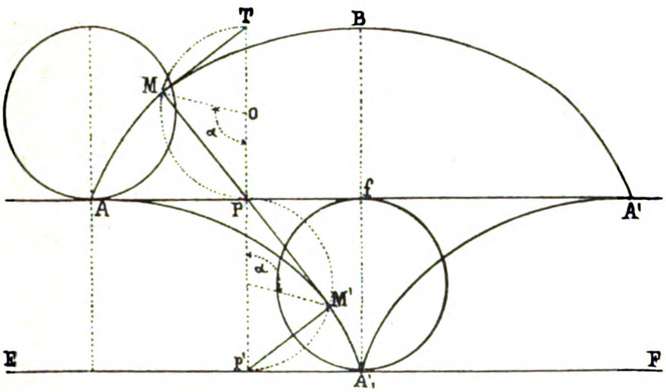


Fig. 68.

consécutifs infiniment petits, communs avec la courbe en ce point.

Ainsi, le rayon de courbure en un point quelconque M de la cycloïde est double de la portion M P de la normale comprise entre la courbe et la base.

En désignant l'angle MOP par α, par ρ le rayon de courbure et par r le rayon du cercle générateur, on a

$$\rho = 4\,r' \sin {}^1/_2\,\alpha.$$

Il est ainsi facile de voir que le pied A'_1 de la développée correspond avec le sommet B de la développante, tandis que le sommet de la développée se confond avec l'origine de la développante.

249. — **Longueur de la cycloïde.** — La longueur de la portion A M′ de la cycloïde A M′ A'_1 est égale à la longueur du

rayon de courbure au point M de la cycloïde AMB; il est égal à MM′, puisque c'est la longueur du fil déroulé de la portion de cycloïde A M′.

On a donc

$$A M' = M M' = 2 MP = 4 r . \sin {}^1/_2 \alpha .$$

Pour obtenir la longueur l' de la portion de cycloïde $A'_1 M'$, nous avons évidemment la différence :

$$l' = 4 r - 4 r \sin {}^1/_2 \alpha = 4 r (1 - \sin {}^1/_2 \alpha).$$

Epicycloïde.

250. **Définition.** — L'épicycloïde est une courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle roulant sans glisser sur la circonférence d'un autre cercle.

Le cercle générateur peut rouler soit à l'extérieur, soit à l'intérieur du cercle directeur; dans ce dernier cas, l'épicycloïde intérieure se nomme *hypocycloïde*.

Nous avons vu que cette courbe est employée comme forme de dents dans l'engrenage de deux roues tournant autour de deux axes parallèles.

251. **Tracé de l'épicycloïde.** — Ce tracé est analogue à celui de la cycloïde. Décrivons d'abord du centre C la circonférence directrice sur laquelle doit rouler le cercle générateur O. Marquons sur cette circonférence C une longueur A A′ égale à la longueur de la circonférence du cercle générateur. Ce dernier étant tangent au point A, divisons sa circonférence et la base A A′ en un nombre égal de parties, 12 par exemple.

Du centre C, décrivons une circonférence de rayon CO; cette circonférence sera celle des lieux occupés successivement par le centre du cercle générateur; traçons ensuite les rayons C A, C 1,. C 2,... etc., prolongés jusqu'à la circonférence passant par le centre du cercle générateur. Puis décrivons des points 1_0, 2_0, 3_0,...... etc., comme centres, des circonférences de rayon égal à celui du cercle générateur.

Remarquons maintenant que, lorsque le centre du cercle générateur est parvenu en 1_0, le point 1_1 de sa circonférence

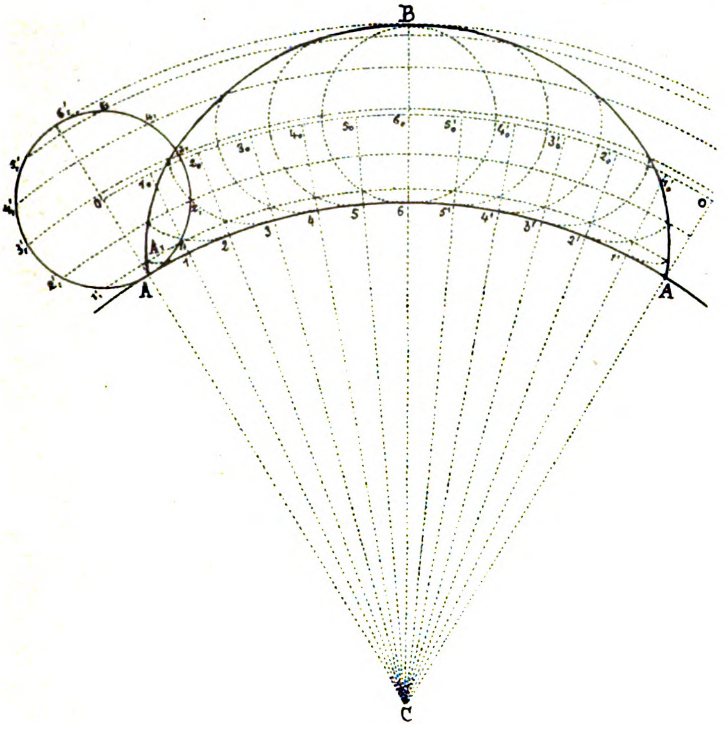


Fig. 69.

s'est abaissé jusqu'en 1 ; ce point s'est par suite rapproché de C de la même quantité que le point A s'en est éloigné. En décrivant donc du centre C une circonférence passant par la division 1_1 du cercle générateur, nous obtenons le point A_1 par l'intersection de cette dernière circonférence et celle du cercle générateur au point 1_0.

De la même façon, nous pourrions déterminer autant de points que l'on veut et, en les réunissant par une ligne continue, nous obtiendrions l'épicycloïde cherchée telle qu'elle est représentée fig. 69.

252. **Tracé de l'épicycloïde d'un mouvement continu.** — C et O étant des plateaux circulaires et A une pointe de crayon

fixée dans la circonférence O, on comprend qu'en faisant rouler sans glisser le plateau O sur le plateau C le crayon tracera l'épicycloïde ABA′ d'un mouvement continu.

253. **Mener une normale, puis une tangente à l'épicycloïde.** — Des considérations identiques à celles qui nous ont servi à mener une normale et une tangente à la cycloïde, nous fournissent le moyen de mener ces mêmes droites à l'épicycloïde.

S'agit-il de mener une normale au point M de l'épicycloïde AMB (fig. 70), nous commençons par chercher le centre du cercle générateur appartenant au point M de l'épicycloïde, en reportant de ce point M le rayon du cercle générateur sur la circonférence autour de laquelle il se meut pendant le roulement de son centre. Du point O_1 nous figurons la position du cercle générateur et nous trouvons le point de tangence P des deux circonférences.

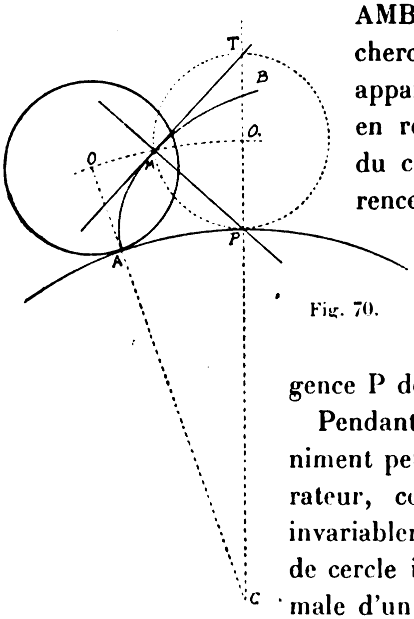


Fig. 70.

Pendant une période de mouvement infiniment petite tous les points du cercle générateur, comme aussi ceux qui sont liés invariablement avec lui, décrivent des arcs de cercle infiniment petits. Comme la normale d'un arc de cercle se confond avec le rayon, nous aurons donc le rayon MP comme normale au point M de l'épicycloïde AMB.

En traçant ensuite du point M une perpendiculaire à la normale, nous obtiendrons la tangente M T. Cette tangente devra passer par le point T du cercle générateur, puisque tout angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.

254. **Développée et rayon de courbure de l'épicycloïde.** — Nous avons vu que la développée d'une cycloïde est une cycloïde égale à sa développante et placée de telle façon que le sommet de la développée coïncide avec l'origine de la déve-

loppante et le sommet de la développante se trouvant sur une même perpendiculaire à la base avec l'origine de la développée. En outre, les deux bases sont parallèles entre elles et éloignées l'une de l'autre du diamètre du cercle générateur.

Concernant l'épicycloïde, nous verrons encore que sa développée est une courbe semblable, mais non égale. Le sommet de la développée et l'origine de la développante au point A (fig. 71) coïncident encore ; le sommet B de la développante

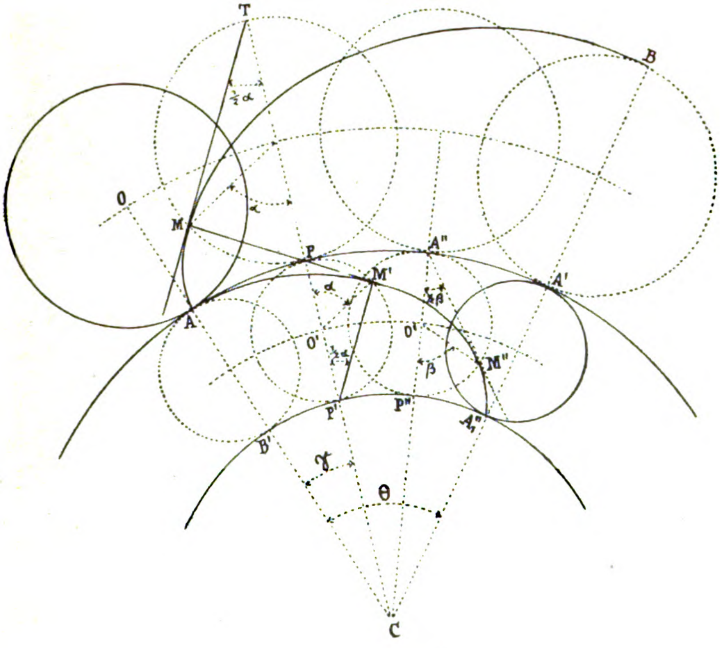


Fig. 71.

et l'origine A''_1 se trouvent sur le même rayon BC, mais leurs cercles générateurs sont de diamètres différents.

Les deux demi-épicycloïdes sont contenues dans le même angle ACB que nous désignerons par θ. Si nous appelons R le rayon de la base de la développante et r celui de son cercle générateur, R′ le rayon de la base de la développée et r'

celui de son cercle générateur, nous voyons que la longueur de la base de la développante est

$$R\theta = \pi r$$

et celle de la développée

$$R'\theta = \pi r'.$$

En divisant l'une de ces égalités par l'autre, on obtient

$$\frac{R\theta}{R'\theta} = \frac{\pi r}{\pi r'}$$

ou

$$\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}.$$

D'autre part, on doit avoir encore

$$R - R' = 2r',$$

d'où l'on tire

$$r' = \frac{R - R'}{2}.$$

En substituant,

$$\frac{R}{R'} = \frac{2r}{R - R'}$$

et

$$(1) \qquad R' = \frac{R^2}{R + 2r}.$$

Soit, par exemple, $R = 60$ mm. et $r = 20$ mm., nous aurons dans ce cas :

$$R' = \frac{60^2}{60 + 2 \times 20} = \frac{3600}{100} = 36 \text{ mm.}$$

et

$$r' = \frac{60 - 36}{2} = 12 \text{ mm.}$$

255. Le point M' (fig. 71) est le *centre de courbure* du point M de l'épicycloïde AMB; il est situé sur la développée A''_1 M' A.

Nous avons, en effet,

$$\text{arc MP} = \text{arc AP},$$

puisque le cercle générateur a roulé sans glisser sur la circonférence A A′. Or,

$$\text{arc } MP = r\alpha \text{ et arc } AP = R \times \text{angle } ACP.$$

Appelons l'angle ACP. γ et posons

$$r\alpha = R\gamma;$$

on aura donc

$$\frac{r}{R} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Lorsque le cercle générateur de rayon r' a roulé sans glisser sur la base B′ A″$_1$, cette longueur d'arc B′ A″$_1$ est égale à $\pi r'$. On a aussi

$$\pi r' = \text{arc } P M' + \text{arc } M' P',$$

puis

$$\text{arc } P' M' = \text{arc } P' A''_1,$$
$$\text{arc } P M' = \text{arc } B' P',$$

et comme

$$\text{arc } P M' = r' \times \text{angle } P O' M',$$
$$\text{arc } B' P' = R' \gamma,$$

on aura donc

$$r' \times \text{angle } PO'M' = R'\gamma,$$

d'où

$$\frac{r'}{R'} = \frac{\gamma}{\text{angle } PO'M'}$$

Mais comme nous avons

$$\frac{r'}{R'} = \frac{r}{R},$$

on aura aussi

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\text{angle } PO'M'},$$

d'où

$$\alpha = \text{angle } PO'M'.$$

Le point M′ ainsi déterminé appartient donc bien à la développée.

Comme l'angle MTP = M′P′P = $^1/_2\ \alpha$ et, comme les angles en M et en M′ sont des angles droits, les droites M P et P M′ auront le même alignement.

256. La droite MM′ représentant le fil développé est le *rayon de courbure* du point M de la développante et la longueur de l'arc A M′ développé.

Nous avons, en effet,

$$MM' = MP + PM';$$

or

$$MP = 2r.\sin {}^1/_2\,\alpha \text{ et } PM' = 2r'.\sin {}^1/_2\,\alpha,$$

donc

$$MM' = 2(r + r')\sin {}^1/_2\,\alpha.$$

En désignant le rayon de courbure par ρ et en remplaçant

$$r' \text{ par } \frac{R - R'}{2} = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{R}{R + 2r}\right),$$

nous aurons :

$$(2)\quad \rho = 2r\left(1 + \frac{R}{R + 2r}\right)\sin {}^1/_2\,\alpha = 4r\frac{R + r}{R + 2r}\sin {}^1/_2\,\alpha.$$

Soit, comme exemple numérique, $r = 20$ mm., $R = 60$ mm., $\alpha = 60°$, nous obtiendrons successivement

$$\frac{R}{R + 2r} = \frac{60}{60 + 40} = 0{,}6 \text{ et } 1 + \frac{R}{R + 2r} = 1{,}6.$$

$$2r\left(1 + \frac{R}{R + 2r}\right) = 40 \times 1{,}6 = 64,$$

puis

$$\text{Log} : 64 = 1{,}80618$$

$$+ \log : \sin : {}^1/_2\,\alpha = \underline{9{,}69897}$$

$$\log : \rho = 1{,}50515, \text{ d'où } \rho = 32 \text{ mm.}$$

Pour ${}^1/_2\,\alpha = 90°$, le rayon de courbure $\rho = A''_1B = 64$ mm.

257. Nous savons que, dans les engrenages à flancs, le rayon du cercle générateur de l'épicycloïde est égal à la moitié du rayon primitif du pignon, que nous désignerons par r' ; on a donc dans ce cas (2)

$$2r = r'.$$

Le rayon R prend alors la notation r, rayon primitif de la roue. L'angle ${}^1/_2\,\alpha$ est l'angle formé par le flanc de l'aile du pignon et la ligne des centres.

Dans ces conditions, la formule (2) devient :

$$\rho = r' \left(1 + \frac{r}{r + r'}\right) \sin {}^1/_2\, \alpha = r' \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{r'}{r}}\right) \sin {}^1/_2\, \alpha,$$

ou encore, n et n' étant les nombres de dents (190),

$$(3) \quad \rho = r' \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{n'}{n}}\right) \sin {}^1/_2\, \alpha = r' \left(\frac{2 + \frac{n'}{n}}{1 + \frac{n'}{n}}\right) \sin {}^1/_2\, \alpha.$$

258. Les formules (2) et (3) font voir qu'à l'origine le rayon de courbure est nul. Ce fait indique qu'en ce point la courbe se réunit au rayon primitif de la roue sans qu'il se forme d'angle brusque.

Le rayon de courbure augmente ensuite proportionnellement au sinus de l'angle formé par le flanc de l'aile et la ligne des centres ; il devient maximum lorsque l'angle ${}^1/_2\, \alpha$ égale 90° ; il diminue ensuite et revient à zéro pour ${}^1/_2\, \alpha = 0$, c'est-à-dire au point de rebroussement de la courbe.

259. **Longueur de l'épicycloïde.** — La longueur d'arc d'une courbe est égale à la longueur du fil développé. Ainsi (fig. 71)

$$\text{arc AM}' = \text{MM}' = 2\, r \left(1 + \frac{R}{R + 2\, r}\right) \sin {}^1/_2\, \alpha.$$

On a le plus souvent besoin de déterminer la longueur d'un arc d'épicycloïde compté à partir de son origine ; il faut donc en déterminer la longueur depuis le point A_1''. Pour ce but, il est également convenable de prendre, au lieu de l'angle P P′ M′, son complémentaire P′ P M′, que nous désignerons par ${}^1/_2\, \beta$. Pour le point M″, l'angle ${}^1/_2\, \beta$ devient ainsi égal à P″ A″ M″, ce qui oblige à changer le sinus en cosinus.

Pour obtenir la longueur A_1'' M″ de l'épicycloïde A_1'' M″ A, remarquons que cette longueur est égale à A A''_1 — A M″. Donc

$$l = 2\, r \left(1 + \frac{R}{R + 2\, r}\right) - 2\, r \left(1 + \frac{R}{R + 2\, r}\right) \cos {}^1/_2\, \beta,$$

ou

$$l = 2\,r\left(1 + \frac{R}{R + 2\,r}\right)\left(1 - \cos {}^1/_2\,\beta\right);$$

r est ici le rayon du cercle générateur de l'épicycloïde A M B et R le rayon de sa base; comme nous avons (254)

$$r = \frac{r'}{R'}\left(R' + 2\,r'\right) \text{ et } R = R' + 2\,r',$$

en substituant ces deux valeurs dans l'équation ci-dessus, nous obtiendrons la longueur l de l'arc d'épicycloïde, compté à partir de l'origine, soit :

$$(4) \qquad l = 4\,r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right)\left(1 - \cos {}^1/_2\,\beta\right)$$

260. **Première application.** — Une roue de 80 dents peut conduire l'aile d'un pignon de 10 ailes après la ligne des centres d'un angle $^1/_2\,\beta = 34° \; 45' \; 48''$ (266) ; quelle est la longueur d'arc de l'épicycloïde de la dent à partir de son origine lorsque le rayon primitif de la roue est de 10 mm. ?

Solution : le rayon r' du cercle générateur de l'épicycloïde est $^1/_{16} \times 10$. Nous avons donc

$$1 + \frac{r'}{R'} = 1 + \frac{1}{16} = 1{,}0625$$

et

$$4\,r' = 4 \times \frac{10}{16} = 2{,}5,$$

d'où l'on obtient :

$$4\,r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right) = 2{,}5 \times 1{,}0625 = 2{,}65625.$$

L'expression naturelle de $\cos {}^1/_2\,\beta$ est

$$\cos {}^1/_2\,\beta = 0{,}821514,$$

par suite

$$1 - \cos {}^1/_2\,\beta = 0{,}178486.$$

Puis,

$$\log : 4\,r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right) = 0{,}42427$$

$$+ \log : (1 - \cos {}^1/_2\,\beta) = 0{,}25160 - 1$$

$$\log : l = 0{,}67587 - 1,$$

d'où

$$l = 0{,}4741 \text{ mm.}$$

Remarque. — La hauteur de l'ogive est égale, dans ce cas, à 0,42285 mm. Nous indiquons plus loin le moyen de calculer cette dernière valeur (267).

261. **Deuxième application.** — Une roue de 60 dents peut conduire l'aile d'un pignon de 6 ailes d'un angle $^1/_2\,\beta = 42°\ 15'\ 47''$ après la ligne des centres. Quelle est la longueur de l'arc d'épicycloïde de la dent, le rayon primitif de la roue étant de 5 mm.?

Solution. — Nous avons ici $r' = 0{,}25$; donc

$$1 + \frac{r'}{R'} = 1{,}05. \qquad 4\,r' = 1;$$

$$\cos {^1/_2}\,\beta = 0{,}74006$$

et

$$1 - \cos {^1/_2}\,\beta = 0{,}25994.$$

Par suite,

$$\log : 4\,r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right) = 0{,}02119$$

$$+ \log : (1 - \cos {^1/_2}\,\beta) = \underline{0{,}41487 - 1}$$

$$\log : l = 0{,}43606 - 1$$

$$l = 0{,}27293 \text{ mm.}$$

Remarque. — La hauteur de l'ogive est dans ce cas égale à 0,2325 mm.

262. **Troisième application.** — Même problème pour l'engrenage d'une roue de 70 dents dans un pignon de 7 ailes, l'angle $^1/_2\,\beta$ étant $39°\ 55'\ 15''$ et le rayon primitif de la roue 5 mm.

Solution. — Nous avons,

$$\log : 4\,r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right) = 0{,}02119. \qquad \cos {^1/_2}\,\beta = 0{,}76693$$

$$\log : (1 - \cos {^1/_2}\,\beta) = \underline{0{,}36749 - 1.} \qquad 1 - \cos {^1/_2}\,\beta = 0{,}23307.$$

$$\log : l = 0{,}38868 - 1.$$

et

$$l = 0{,}24172 \text{ mm.}$$

Remarque. — La hauteur de l'ogive est, dans ce cas, de 0,21165 mm.

Le calcul est donc le même pour tous les engrenages à flancs et il est inutile de poursuivre plus loin les exemples d'application.

Rapport du rayon vecteur à l'angle formé par le rayon vecteur variable et le rayon vecteur initial.

263. Le rayon vecteur C M (fig. 72), que nous désignerons par ρ, forme avec le rayon vecteur initial C A = R, rayon de la base, un angle θ ; on peut concevoir qu'il doive exister une relation entre le rayon ρ et l'angle θ. Cette relation est compliquée, mais elle a une grande importance dans les calculs relatifs à la détermination du rayon total des roues.

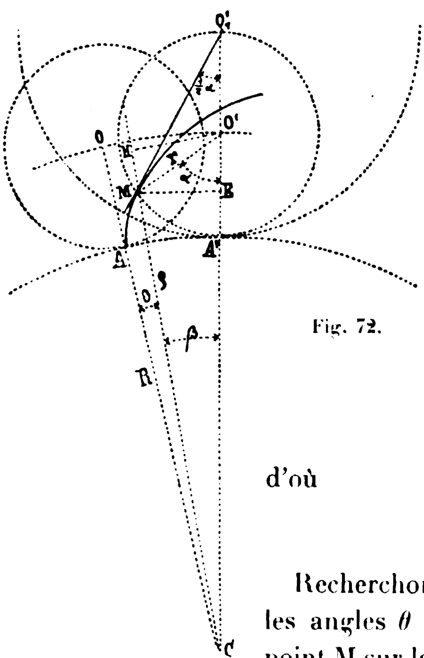


Fig. 72.

Si les angles M O′A′ = α et M C O′ = β sont connus, nous aurons la proportion :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

d'où

$$\rho = r \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Recherchons maintenant une relation entre les angles θ et α, et, à cet effet, projetons le point M sur la droite C O′ ; nous formerons ainsi deux triangles rectangles M E O′ et M E C. Dans le premier, nous avons

$$\text{ME} = r \sin \alpha,$$

et dans le second

$$\text{ME} = (\text{R} + r - r.\cos \alpha) \text{ tang. } \beta,$$

d'où

$$r.\sin\alpha = (R + r - r.\cos\alpha)\ \text{tang.}\ \beta.$$

En divisant par r, il vient :

$$\sin\alpha = \left(\frac{R}{r} + 1 - \cos\alpha\right)\ \text{tang.}\ \beta.$$

Mais

$$AA' = MA',$$

donc

$$r\alpha = R\,(\theta + \beta),$$

d'où

$$\beta = \frac{r}{R}\,\alpha - \theta;$$

donc

(5) $$\sin\alpha = \left(\frac{R}{r} + 1 - \cos\alpha\right)\ \text{tang.}\ \left(\frac{r}{R}\,\alpha - \theta\right).$$

264. *Remarque.* — On peut aussi projeter le point O′ (fig. 72) sur le prolongement de CM et on forme ainsi les deux triangles rectangles O′HM et O′HC. Dans le premier cas, nous avons

$$O'H = r.\sin(\alpha + \beta),$$

et dans le second

$$O'H = (R + r)\sin\beta,$$

d'où

$$r.\sin(\alpha + \beta) = (R + r)\sin\beta.$$

En remplaçant α par sa valeur,

$$\alpha = \frac{R}{r}\,(\theta + \beta),$$

et, en divisant par r, il vient

$$\sin\left[\frac{R}{r}\,(\theta + \beta) + \beta\right] = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\sin\beta,$$

qu'on peut aussi écrire :

(6) $$\sin\left[\frac{R}{r}\,\theta + \left(\frac{R}{r} + 1\right)\beta\right] = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\sin\beta.$$

265. Le calcul des équations (5) et (6) est compliqué ; on voit, en effet, qu'on ne peut procéder que par approxima-

tions successives. Nous donnons ci-dessous un exemple de ce genre de calcul.

266. **Application numérique.** — Soit à rechercher la valeur de l'angle α (fig. 72) correspondant à la position du point M de l'épicycloïde de la dent d'une roue de 60 dents engrenant dans un pignon de 6 ailes.

Nous supposerons que le point M considéré appartient à la pointe de la dent ; c'est donc le point extrême de la courbe de cette dent.

L'application de la formule (5) nous donne d'abord

$$\frac{R}{r} + 1 = \frac{60}{3} + 1 = 21\,; \quad \frac{r}{R} = \frac{3}{60} = 0{,}05.$$

En outre,

$$\theta = \frac{360^\circ}{4 \times 60} = 1^\circ 30',$$

puisque la moitié d'une dent doit occuper le quart du pas de l'engrenage.

Supposons d'abord l'angle α de 80° ; nous aurons alors

$$\beta = \frac{r}{R}\,\alpha - \theta = 4^\circ - 1^\circ 30' = 2^\circ 30'.$$

Le calcul donne :

$$\begin{array}{rl} \dfrac{R}{r} + 1 = & 21 \\ - \cos 80^\circ = & \underline{\ 0{,}17365} \\ \dfrac{R}{r} + 1 - \cos\alpha = & 20{,}82635 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log : \dfrac{R}{r} + 1 - \cos\alpha = & 1{,}31861 \\ + \log : \text{tang. } \beta = & \underline{8{,}64009} \\ & 9{,}95870 \end{array}$$

Le logarithme du second membre de l'équation (5) est donc 9,95870 ; pour que l'égalité de ce second membre existât avec le premier, il faudrait que le logarithme ci-dessus fût égal à celui de sin. α = sin. 80°. Nous avons :

$$\begin{array}{rl} \log : \text{second membre} = & 9{,}95870 \\ \log : \sin : 80^\circ \ldots\ldots\ldots = & \underline{9{,}99335} \\ \text{différence} = & 0{,}03465. \end{array}$$

L'égalité des deux membres de l'équation (5) ne se vérifie donc pas ; le logarithme de sin α est trop grand de 0,03465 ;

il faut par conséquent que la valeur de α soit plus grande que 80°. Essayons de prendre $\alpha = 86°$. Nous aurons :

$$\beta = \frac{r}{R}\alpha - \theta = 2°48'.$$

$$\frac{R}{r} + 1 = 21 \qquad \log: \frac{R}{r} + 1 - \cos\alpha = 1{,}32077$$

$$-\cos. 86° = 0{,}06976 \qquad \log: \text{tang.}\ \beta = 8{,}68938$$

$$20{,}93024 \qquad 10{,}01015$$

$$\log: \sin.\ \alpha = \log: \sin.\ 86° = 9{,}99894$$

$$\text{Différence} = 0{,}01121$$

Cette fois-ci, le logarithme du premier membre est plus petit que celui du second, ce qui indique que l'angle de 86° est trop grand. L'angle α doit donc se trouver entre 80 et 86 degrés.

Etablissons maintenant la proportion suivante, en remarquant que, pour 6° d'arc, la différence entre les valeurs naturelles des cosinus est de 0,04586 :

$$\frac{0{,}04586}{0{,}01121} = \frac{6}{x}\ \text{d'où}\ x = \frac{6 \times 1121}{4586},$$

et, calcul fait :

$$x = 1°{,}4666... = 1°28'.$$

Ainsi, si la différence que l'on obtient par le calcul des deux membres était proportionnelle à la différence des angles choisis, ce qui n'a pas tout à fait lieu, l'angle de 86° serait de 1° 28′ trop grand, ce qui donne une nouvelle valeur pour α, soit 86° — 1° 28′ = 84° 32′. Recommençons donc la vérification pour cette dernière valeur. On a

$$\alpha = 84°32' \text{ et par suite } \beta = 2°43'36''$$

$$\frac{R}{r} + 1 = 21 \qquad \log: \frac{R}{r} + 1 - \cos\alpha = 1{,}32024$$

$$-\cos\alpha = 0{,}09527 \qquad +\log: \text{tang.}\ \beta = 8{,}67784$$

$$20{,}90473 \qquad 9{,}99808$$

$$\log: \sin\alpha = 9{,}99802$$

$$\text{Différence} = 0{,}00006$$

On voit que nous sommes très rapprochés de la valeur réelle de α; si on le désire, on pourra s'en approcher davan-

tage encore par une nouvelle approximation et l'on arrivera enfin à

$$\alpha = 84° 31' 34'' \text{ et } \beta = 2° 43' 34''.$$

Tableau indiquant l'angle $1/2\ \alpha$ parcouru par le pignon de divers engrenages usuels pendant le contact d'une dent de la roue avec l'aile de ce pignon.

Nombre des dents	Angle de conduite après la ligne des centres	Angle de conduite avant la ligne des centres	Angle de conduite TOTAL
Roue 60 Pignon 6	42° 15′ 47″	17° 44′ 13″	60°
Roue 70 Pignon 7	39° 55′ 15″	11° 30′ 27″,857	51° 25′ 42″,857
Roue 60 Pignon 8	37° 36′ 20″	7° 23′ 40″	45°
Roue 64 Pignon 8	37° 42′ 30″	7° 17′ 30″	45°
Roue 80 Pignon 8	38° 0′ 55″	6° 59′ 5″	45°
Roue 75 Pignon 10	34° 39′ 53″	1° 20′ 7″	36°
Roue 80 Pignon 10	34° 45′ 48″	1° 14′ 12″	36°
Roue 90 Pignon 12	32° 27′ 30″		32° 27′ 30″ au lieu des 30° nécessaires
Roue 96 Pignon 12	32° 33′ 14″		32° 33′ 14″ au lieu des 30° nécessaires
Roue 120 Pignon 12	32° 50′		32° 50′ au lieu des 30° nécessaires

Calcul du rayon total de la roue.

267. Connaissant maintenant les deux angles α et β, il devient facile de calculer la valeur du rayon total de la roue, c'est-à-dire du rayon ρ (fig. 72), aboutissant à la pointe de l'ogive de la dent. (Voir calcul précédent : 266).

Faisant ce calcul pour le rayon primitif $R = 1$, nous aurons :

$$r = \frac{1}{20} R = 0,05 R$$

pour les données du calcul précédent.

On doit donc avoir (263)

$$\rho = 0,05 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

et

$$\begin{array}{rl} \log : \sin \alpha = & 9,99801 \\ -\log : \sin \beta = & \underline{8,67726} \\ & 1,32075 \\ +\log : 0,05 = & \underline{0,69897 - 2} \\ \log : \rho = & 0,01972, \text{ d'où } \rho = 1,0464. \end{array}$$

Forme de l'excédent de l'aile du pignon dans un engrenage à flancs.

268. Les engrenages des roues d'une montre tournent toujours dans le même sens [1] et ce sont les dents des roues qui conduisent les ailes du pignon.

L'équation (5) peut s'écrire sous la forme suivante, en remarquant que les rayons primitifs sont proportionnels aux nombres de dents et que, dans cette formule, le rayon r du

[1] Sauf pourtant les roues de la mise à l'heure, qui sont conduites par les pignons pendant la marche de la montre. Dans ce mécanisme, la roue de minuterie ne condu't la chaussée que pendant l'instant où ce rouage est mu par la main en mettant la montre à l'heure.

cercle générateur est égal à la moitié du rayon primitif du pignon :

$$\sin \alpha = \left(\frac{n}{{}^1/_2\, n'} + 1 - \cos \alpha\right) \text{tang.} \left(\frac{{}^1/_2\, n'}{n}\, \alpha - \theta\right).$$

Lorsque dans un engrenage donné on trouve, par le calcul de l'équation ci-dessus, l'angle

$${}^1/_2\, \alpha > \frac{360^\circ}{n'},$$

la dent de la roue peut conduire l'aile du pignon d'une quantité suffisante après la ligne des centres pour que le contact de la dent suivante puisse commencer sur cette ligne. Tel est, par exemple, le cas d'une roue de 96 dents engrenant dans un pignon de 12 ailes.

Nous avons, en effet, dans ce cas

$$\alpha = 65^\circ\, 6' \text{ et } {}^1/_2\, \alpha = 32^\circ\, 33'.$$

La dent peut donc conduire l'aile d'un angle de 32° 33'. D'autre part, nous voyons que l'angle qui sépare deux flancs consécutifs est de

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

En conséquence, on peut constater que la dent conduit l'aile 2° 33' plus loin que ce qui est rigoureusement nécessaire.

Par contre, pour l'engrenage d'une roue de 60 dents dans un pignon de 6 ailes, on a

$$\alpha = 84^\circ\, 31'\, 34'', \text{ d'où } {}^1/_2\, \alpha = 12^\circ\, 15'\, 47''.$$

En outre,

$$\frac{360^\circ}{5} = 60^\circ.$$

Comme l'aile doit être conduite par la dent d'un angle de 60° et qu'elle n'est conduite en réalité que d'un angle de 42° 15′ 17″ après la ligne des centres, il faut nécessairement que le contact commence 17° 41′ 13″ avant cette ligne, puisque

$$12^\circ\, 15'\, 17'' + 17^\circ\, 41'\, 13'' = 60^\circ.$$

L'engrenage doit être disposé, dans ce cas, de façon à ce que la dent entre en contact avec l'aile avant la ligne des centres et nous avons vu que, pour cela, il faut terminer l'aile du pignon par une forme épicycloïdale susceptible d'être conduite par le flanc de la dent jusqu'à l'instant où le contact se fait sur la ligne des centres : à partir de ce point, c'est la courbe de la dent qui conduit le flanc de l'aile (233). L'épicycloïde de l'aile devra être décrite par un point d'une circonférence génératrice de diamètre égal au rayon primitif de la roue.

269. Comme l'angle suivant lequel la dent doit entrer en contact avec l'aile avant la ligne des centres, n'est jamais très considérable, il n'est que rarement nécessaire de conserver l'excédent de l'aile parfaitement ogival. Cette forme serait plutôt préjudiciable qu'utile, car, outre que le frottement serait augmenté, elle nécessiterait aussi des dents plus allongées pour la roue, afin de permettre la libre introduction de l'aile du pignon dans le vide qui sépare deux dents de la roue.

On ne conserve donc que la partie de l'épicycloïde qui est directement utile. En grosse mécanique, on enlève simplement la quantité voulue de la pointe des dents[1]. En horlogerie, on termine l'aile du pignon par une forme arrondie, un arc d'ellipse, par exemple. Cette forme de l'excédent doit être déterminée de façon que son rayon de courbure, au point de liaison de la courbe et de l'épicycloïde, soit le même pour les deux lignes (fig. 73). Il est évident que, par sécurité, on fait commencer le contact de la dent et de l'aile quelques degrés plus vite qu'il est nécessaire. Ainsi, dans le cas précédent, on admettra un contact commençant 20° avant la ligne des centres, plutôt qu'à 17° 44′ 13″.

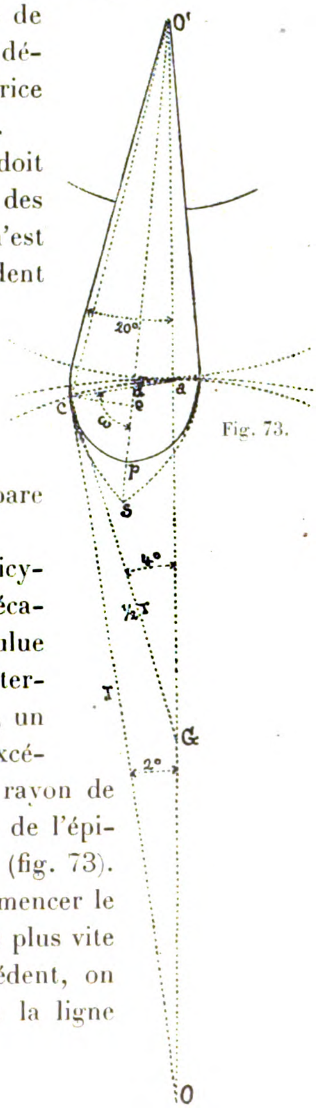


Fig. 73.

[1] Cette opération s'appelle l'échanfrinage des dents.

270. Pratiquement, dans un grand nombre de pignons ordinaires, on rencontre l'excédent de l'aile terminé par un demi-cercle. Nous sommes actuellement à même de reconnaître que cette forme est vicieuse, surtout pour les pignons de bas nombre. Il est facile de se rendre compte qu'avec cette forme la dent conduit l'aile trop loin après la ligne des centres, que le point de contact ne reste pas sur la circonférence du cercle générateur et qu'il peut s'établir, avant la ligne des centres, un contact du flanc d'une dent avec l'arrondi de l'aile. Il résulte de ce dernier fait un arcboutement souvent assez prononcé.

C'est probablement cet arcboutement, observé par les horlogers, qui leur a fait fréquemment exagérer l'importance du frottement des engrenages avant la ligne des centres et qui leur a fait croire que ce dernier est beaucoup plus considérable que celui qui se produit après cette ligne. Le frottement observé ne doit être en réalité que de l'arcboutement et il suffit de supprimer celui-ci pour diminuer notamment la difficulté de la menée. Le calcul prouve, en effet, que la différence entre ce qu'on appelle le frottement « rentrant » et le frottement « sortant » n'est pas assez considérable pour être si facilement saisissable.

271. Pour déterminer géométriquement la forme de l'excédent d'une aile de pignon, il est donc acquis que cette forme doit être composée d'un arc épicycloïdal de longueur suffisante pour pouvoir entrer en contact avec le flanc d'une dent de la roue quelques degrés avant que la pointe de la dent suivante quitte la circonférence du cercle générateur. Deux dents peuvent donc conduire à la fois deux ailes pendant un petit arc.

Les épicycloïdes symétriques de l'aile sont ensuite terminées par une forme elliptique les liant l'une à l'autre. Soit donc à déterminer cette courbe, qui a une seule condition à remplir, savoir que son rayon de courbure au point de jonction soit le même que celui du même point de l'épicycloïde.

272. Déterminons d'abord le rayon de courbure de l'épicy-

cloïde en un point répondant à une menée de 20° avant la ligne des centres pour une roue de 60 dents engrenant dans un pignon de 6 ailes.

Puisque la forme génératrice de l'épicycloïde de l'aile est un cercle de diamètre égal au rayon primitif de la roue, la formule (257)

$$\rho = r' \left(1 + \frac{r}{r + r'}\right) \sin \frac{1}{2} \alpha$$

devra s'écrire :

$$\rho = r \left(1 + \frac{r'}{r + r'}\right) \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

Admettons :

$$r = 60, \ r' = 6, \text{ par suite } \frac{1}{2} \alpha = \frac{20^\circ}{\frac{60}{6}} = 2^\circ;$$

nous aurons alors :

$$\rho = 60 \left(1 + \frac{6}{66}\right) \sin 2^\circ = 65{,}451 \times \sin 2^\circ,$$

et, calcul fait,

$$\rho = 2{,}28433.$$

273. Recherchons maintenant la valeur de l'angle ω, formé par le rayon de courbure et la droite passant par le milieu de l'aile (fig. 73).

L'angle acO est un angle droit et nous avons donc

$$acO = 90^\circ.$$

L'angle aOc, ou $\frac{1}{2}\alpha$, est de 2° :

$$aOc = 2^\circ;$$

par suite

$$caO = 88^\circ$$

et

$$O'ac = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ.$$

Nous avons en outre l'angle

$$aO'd = 20^\circ - \frac{360^\circ}{2 \times 3 \times 6} = 10^\circ,$$

puisque dans ce cas la largeur d'une aile est égale au tiers du pas de l'engrenage (240).

Nous aurons enfin :

$$\omega = cds = O'da = 180^\circ - O'ac - aO'd$$
$$\omega = 180^\circ - (92^\circ + 10^\circ)$$
$$\omega = 78^\circ.$$

274. Nous avons ensuite à déterminer la droite $O'c$, joignant le centre du pignon au point de premier contact.

Dans le triangle GcO', nous connaissons les côtés

$$GO' = \frac{1}{2} r + r',$$

$$Gc = \frac{1}{2} r$$

et l'angle

$$O'Gc = 4^\circ.$$

Nous aurons par suite la valeur de l'angle $aO'c$ exprimée par

$$\text{tang. } aO'c = \frac{\frac{1}{2} r. \sin 4^\circ}{\frac{1}{2} r + r' - \frac{1}{2} r \cos 4^\circ}$$

ou

$$\text{tang : } aO'c = \frac{\sin 4^\circ}{1 + \frac{r'}{\frac{1}{2} r} - \cos 4^\circ}.$$

Le calcul donne

$$aO'c = 19^\circ\, 0'\, 46''.$$

Le côté $O'c$ du triangle $O'cG$ nous sera enfin fourni par la formule

$$O'c = \frac{\frac{1}{2} r. \sin 4^\circ}{\sin a O'c},$$

d'où, calcul fait,

$$O'c = 6{,}4236.$$

275. Projetons encore le point c en e, sur la droite $O's$; désignons par y la droite ce et déterminons cette droite. Nous aurons

$$y = O'c. \sin cO'd,$$

mais

$$cO'd = aO'c - aO'd = 19^\circ 0'\ 46'' - 10^\circ = 9^\circ 0'\ 46'' ;$$

par suite

$$y = 6{,}4236 \times \sin 9^\circ\, 0'\ 46''$$

et

$$y = 1{,}00626.$$

276. Nous connaissons maintenant le rayon de courbure ρ au point c de l'épicycloïde, l'inclinaison de ce rayon sur la droite passant par le milieu de l'aile, donc l'angle ω, et enfin l'ordonnée y correspondant à ces mêmes données. Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer une courbe elliptique pouvant satisfaire à ces conditions (271).

271. **Rayon de courbure d'une ellipse.** — L'équation de cette courbe étant

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

on obtient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

et

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

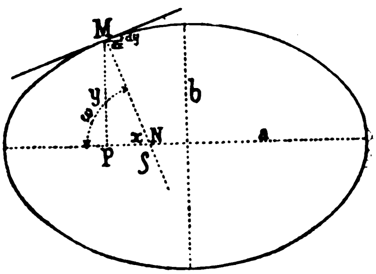


Fig. 74.

L'équation générale du rayon de courbure étant

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

nous obtiendrons successivement

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \frac{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{(a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 y^3} b^4},$$

$$(a^4 y^2)^{\frac{3}{2}} = (a^2 y)^3 = a^6 y^3 ;$$

donc

$$\frac{(a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 y^3} = \frac{a^6 y^3}{a^2 y^3} = a^4 ;$$

par suite

$$\rho = \frac{-(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Nous avons la longueur de la normale MN (fig. 74) exprimée par

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$$

et

$$y\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}\,\frac{1}{a^2 y} = \text{MN},$$

$$\text{MN} = \frac{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}{a^2},$$

$$\text{MN}^3 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6}.$$

On peut donc poser

$$\rho = \frac{a^2\,\text{MN}^3}{b^4};$$

nous avons d'autre part

$$\text{MN} = \frac{y}{\sin\omega};$$

donc

$$\rho = \frac{a^2 y^3}{b^4 \sin^3\omega},$$

d'où

(1) $$a^2 = \frac{\rho\, b^4 \sin^3\omega}{y^3}.$$

Pour déterminer la valeur de b, remarquons que

$$\text{PN} = \frac{y}{\text{tang.}\,\omega},$$

PN étant la sous-normale, dont l'équation générale est

$$Sn = y\frac{dy}{dx} = -y\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{b^2 x}{a^2};$$

d'où

$$\frac{y}{\text{tang.}\,\omega} = -\frac{b^2 x}{a^2}$$

et

$$-x = \frac{a^2 y}{b^2 \text{ tang. } \omega}.$$

Substituons les valeurs de x et de a^2 dans l'équation générale

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Nous aurons

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 y^2}{b^4 \text{ tang.}^2 \omega} = \frac{\rho \sin^3 \omega}{y \text{ tang.}^2 \omega} = \frac{\rho \sin \omega \cos^2 \omega}{y},$$

d'où

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{\rho \sin \omega . \cos^2 \omega}{y}\right)$$

et

(2) $$b = \sqrt{\frac{y^3}{y - \rho \sin \omega . \cos^2 \omega}}.$$

L'équation (1) donne en outre

(3) $$a = b^2 \sqrt{\frac{\rho . \sin^3 \omega}{y^3}}.$$

Ces deux dernières valeurs sont celles des demi-axes de l'ellipse qui remplit les conditions cherchées.

278. **Application numérique à l'exemple précédent.** — Nous avions

$$y = 1{,}00626, \quad \omega = 78°, \quad \rho = 2{,}28433;$$

par conséquent

$$b = \sqrt{\frac{1{,}00626^3}{1{,}00626 - 2{,}28433 . \sin 78° \cos^2 78°}} = 1{,}05834$$

et

$$a = 1{,}05834^2 \sqrt{\frac{2{,}28433 . \sin^3 78°}{1{,}00626^3}} = 1{,}62245.$$

279. **Rayon total du pignon.** — La longueur totale de l'aile dn pignon se compose de la somme des deux longueurs $O'e$ et ep (fig. 73).

La distance ep est égale à $a - x$ (fig. 74). Nous avons

$$- x = \frac{a^2 y}{b^2 \text{ tang. } \omega};$$

en chiffres :

$$- x = \frac{1{,}62245^2 \times 1{,}00626}{1{,}05834^2 \times \text{tang} : 78^\circ} = 0{,}50266,$$

et

$$a - x = 1{,}62245 - 0{,}50266 = 1{,}11979.$$

D'autre part, nous avons (fig. 73)

$$O'e = O'c. \cos cO'e;$$

nous connaissons (274)

$$O'c = 6{,}4236$$

et l'angle (275)

$$cO'e = 9^\circ\, 0'46'';$$

donc

$$O'e = 6{,}4236. \cos 9^\circ\, 0'46'' = 6{,}3443.$$

Le rayon total du pignon sera

$$\begin{array}{r} O'e = 6{,}3443 \\ + (a - x) = 1{,}1198 \\ \hline R' = 7{,}4641. \end{array}$$

280. **Remarque.** — Si l'excédent de l'aile du pignon ci-dessus était formé par une demi-circonférence, nous obtiendrions son rayon total d'une manière beaucoup plus simple.

Le rayon primitif étant 6, la longueur de la circonférence est

$$\text{circonf. prim. :} = 2\pi \times 6.$$

Le pas de l'engrenage doit être de longueur égale à 2π, puisque le nombre d'ailes est de 6.

La largeur d'une aile, comptée sur la circonférence, est le tiers du pas, donc

$$\text{largeur d'aile} = \frac{2\pi}{3};$$

enfin la hauteur de l'excédent est la moitié de cette dernière valeur, donc

$$\text{excédent} = \frac{\pi}{3}.$$

Nous aurons par conséquent le rayon total :

$$R' = r' + \frac{\pi}{3} = 6 + 1,0472 = 7,0472$$

ou

$$R' = 7,05$$

en chiffre rond.

Construction graphique des engrenages.

281. Supposons connus la distance des centres D ainsi que les nombres de dents des deux mobiles et soit comme exemple D = 240 mm., $n = 70$ dents et $n' = 7$ ailes.

Les formules (191)

$$r = D\,\frac{n}{n + n'} \qquad \text{et} \qquad r' = D\,\frac{n'}{n + n'}$$

nous donnent la valeur des rayons primitifs des deux roues :

$$r = 240\,\frac{70}{70 + 7} \qquad \text{et} \qquad r' = 240\,\frac{7}{70 + 7};$$

calculs faits, on obtient :

$$r = 218,18\ldots. \text{ et } r' = 21,818\ldots.$$

Des centres O et O′ (planche I), préalablement déterminés, on décrit les deux cercles primitifs calculés et tangents au point *a*.

Admettons que nous voulions construire un engrenage à flancs ; on peut commencer par déterminer la forme de la dent. Décrivons pour cela le cercle générateur O″ de rayon égal à la moitié de celui du cercle primitif du pignon et, par son roulement autour du cercle primitif de la roue, faisons-lui décrire l'épicycloïde AB.

Remarquons que, pour la clarté de l'épure, au lieu de placer l'origine de la courbe sur la ligne des centres, comme il serait logique de le faire, nous avons reporté cette cons-

truction en un autre point, ce qui revient naturellement au même.

Pour construire l'épicycloïde, on peut suivre la méthode que nous avons indiquée (251) ou procéder plus simplement en reportant sur diverses positions successives du cercle générateur, telles que 1, 2, 3,..., des longueurs $1_1I = 1_10$, $2_1II = 01_1 + 1_12_1$, $3_1III = 01_1 + 1_12_1 + 2_13_1$, etc. En reliant entre eux les points I, II, III,... par une courbe continue, on obtient l'épicycloïde de la dent.

Cette méthode, qui n'est pas rigoureusement exacte, puisqu'elle substitue des longueurs de cordes aux longueurs d'arcs, est cependant très admissible pour des tracés dans lesquels les positions successives du cercle générateur sont relativement rapprochées.

On divise ensuite l'une des circonférences primitives, celle du pignon, par exemple, en autant de parties que cette roue doit avoir de dents. On peut commencer cette division en n'importe quel point de la circonférence ; mais généralement on la commence sur la ligne des centres ou encore au point où doit se trouver l'aile du pignon à l'instant du dernier contact de la dent.

Pour déterminer cette dernière position, on peut se servir de la table (266), laquelle nous donne, pour les engrenages les plus employés en horlogerie, l'angle de menée de l'aile par la dent après la ligne des centres. Ainsi, pour l'engrenage d'une roue de 70 dents avec un pignon de 7 ailes, nous voyons que la dent conduit l'aile 39°55′15″ après la ligne des centres.

Si l'on veut déterminer cette position d'une manière absolument graphique, une division préalable du cercle primitif du pignon donne la longueur du « pas de l'engrenage ». On reporte cette longueur de l'origine de la courbe A jusqu'en C ; on divise le pas en deux parties égales, l'une devant être occupée par le plein de la dent, l'autre par le vide (240). L'extrémité D de l'ogive de la dent sera déterminée en menant le rayon prolongé OD passant par le milieu de la dent.

Du centre O, on décrit un arc de cercle passant par le point D et l'on obtient ainsi le point *d*, position extrême du contact de la dent avec l'aile (231). On mène ensuite la droite O′*d* prolongée jusqu'à la circonférence primitive du pignon. Le point *i* est alors le point de départ de la division définitive du pignon. Si l'on a procédé avec exactitude, l'angle *a*O′*i* doit être dans ce cas égal à 39°55′15″. On peut ainsi constater que le premier contact de la dent avec l'aile doit avoir lieu avant la ligne des centres et à une distance angulaire de cette ligne d'au moins 11°30′27″.

L'excédent de l'aile doit être formé d'un arc d'épicycloïde, comme nous l'avons du reste déjà indiqué (268). Cette épicycloïde est celle qui est décrite par un point d'une circonférence de rayon égal à la moitié du rayon primitif de la roue.

Les courbes des dents étant ainsi formées et leurs positions déterminées, il devient facile de construire l'engrenage en remarquant que, pour les engrenages du rouage de la montre, l'aile du pignon occupe le tiers des pas pour les pignons de 10 ailes et au-dessous, et les deux cinquièmes pour ceux de 12 ailes et au-dessus (240). On limite ensuite l'épicycloïde de l'aile comme nous l'avons dit, en n'en conservant qu'une longueur suffisante pour que la menée commence peu avant le point où doit s'effectuer normalement le premier contact théorique. Pendant un instant très court, deux dents consécutives sont ainsi simultanément en contact et ce fait suffit pour assurer le fonctionnement correct de l'engrenage.

L'aile est ensuite terminée par un arc d'ellipse tel que son rayon de courbure au point de jonction des deux courbes soit le même que celui de l'épicycloïde déterminée.

On limite enfin la longueur des flancs des ailes et des dents par des arcs de cercles de rayon suffisant pour permettre non seulement la libre introduction des dents et des ailes dans les vides correspondants, mais aussi pour réserver la place qu'occuperont les corps étrangers, poussières et autres, qui s'introduisent inévitablement, avec le temps, dans les dentures.

L'engrenage est ainsi construit et, en ayant fait le tracé à une échelle suffisamment agrandie, on poura en déduire toutes les dimensions relatives à sa construction pratique, comme nous le verrons plus loin.

282. La planche II représente le même tracé à une échelle agrandie encore; la distance des centres est de 2200 mm., le rayon primitif de la roue de 2 mètres et celui du pignon de 200 mm. Ce dessin permet de se rendre compte plus clairement de la manière dont s'opère le contact de la dent avec l'aile avant la ligne des centres; la forme d'aile représentée en pointillé est demi-circulaire; on voit ainsi que dans ce cas la normale au point de contact ne passe pas par le point de tangence des circonférences primitives, comme cela est pour la forme demi-elliptique, que par suite la force transmise n'a pas pour valeur celle que nous avons déterminée (201 et suivants) :

$$F' = F \frac{n'}{n},$$

et qu'il doit se produire un « arcboutement ».

283. Le tracé des engrenages de rochets, de renvois, de minuterie, etc., s'exécute d'une manière analogue ; nous examinerons plus loin les quelques modifications admises pour de telles dentures. Il faut aussi, dans ces constructions, tenir compte de la façon dont le « jeu » est distribué (239, 240).

Applications pratiques de la théorie des engrenages.

284. Il se présente en pratique des problèmes de diverses natures, dans lesquels il s'agit de déterminer les dimensions relatives de roues et de pignons.

Il est évident que, de prime abord, l'emploi d'un instrument propre à saisir ces grandeurs devient précieux pour le praticien, en ce sens qu'il lui évite tout calcul ; nous citerons celui dont l'emploi est le plus exact en même temps que le plus simple.

285. **Du compas de proportion et de son emploi.** — Le compas de proportion, dans sa disposition la plus rationnelle, est formé de deux règles plates, droites et divisées ; elles sont reliées entre elles par l'une de leurs extrémités au moyen d'une charnière O (fig. 75).

Ces règles peuvent être rendues fixes dans une position quelconque au moyen d'une vis de serrage V.

Leurs divisons doivent être exactement correspondantes, égales entre elles et numérotées. Le point zéro se trouve à la charnière, sommet de l'angle bOb'.

Le compas de proportion est basé sur la propriété fondamentale des triangles semblables, dans lesquels les côtés homologues sont proportionnels.

Ainsi, en imaginant le diamètre primitif d'une roue placé à la division du compas correspondant à son nombre de dents et le diamètre primitif du pignon à la division correspondant à son nombre d'ailes, on doit avoir la proportion

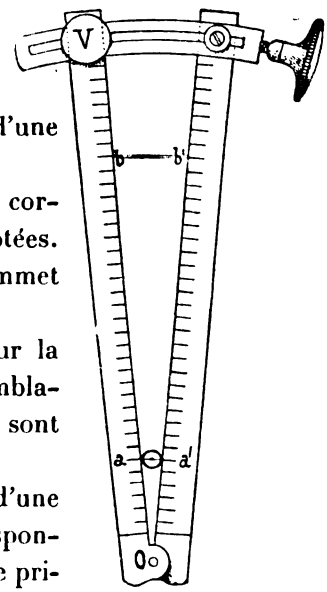


Fig. 75.

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{Ob}{Oa}.$$

Puisque dans un engrenage les nombres de dents des mobiles doivent être entre eux comme leurs rayons ou leurs diamètres primitifs, on comprend que, pour déterminer le diamètre primitif d'un pignon, connaissant celui de la roue, il suffit de placer ce dernier à la division correspondant à son nombre de dents et, pour ce but, d'écarter convenablement les deux branches du compas. Le diamètre primitif du pignon devra alors coïncider avec la division qui correspond à son nombre d'ailes. La proportion

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'}$$

se trouve alors vérifiée.

Mais, pour ce qui précède, nous nous heurtons à la difficulté de ne pouvoir ajuster commodément les diamètres primitifs des deux mobiles dans le compas, puisque ces dimensions ne sont que théoriques.

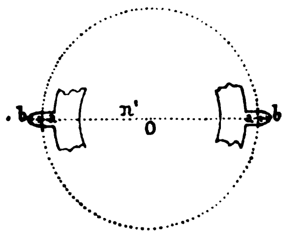


Fig. 76.

On a tourné comme suit la difficulté.

286. En divisant le diamètre primitif d'une roue quelconque par le nombre de ses dents, on obtient une longueur que nous appellerons le *pas diamétral* de l'engrenage. Le compas de proportion donne toujours le pas diamétral par sa division 1 lorsque la roue est placée de façon que son diamètre primitif corresponde, dans l'instrument, à la division du nombre de ses dents.

Or, si nous mesurons la hauteur de l'ogive *ab* (fig. 76) et qu'à cause de celle qui lui est opposée, nous doublions cette valeur ; si nous divisons ensuite ce chiffre pas le pas diamétral, on obtient un quotient qui, ajouté au nombre de dents, donnera le diamètre total de la roue en unité de pas diamétral.

Ce diamètre est donc

$$n + \frac{2\,ab}{d},$$

d étant le pas considéré.

En plaçant maintenant le diamètre total de la roue à la division $n + \frac{2ab}{d}$, son rayon primitif sera par le fait placé à la divison *n*. De même pour le pignon.

287. **Exemple.** — Envisageons une roue de 60 dents engrenant dans un pignon de 6 ailes et représentons graphiquement cette roue avec un rayon primitif de 540 mm.

Le pas diamétral doit être

$$\frac{2 \times 540}{60} = 18 \text{ mm.}$$

Décrivons l'épicycloïde de la dent en faisant rouler un cercle générateur, de rayon égal à la moitié du rayon primitif

du pignon, autour du cercle primitif de la roue; r' étant le rayon du pignon, on aura

$$\frac{1}{2} r' = \frac{6 \times 540}{60 \times 2} = 27.$$

Calculons maintenant la longueur de la corde c qui soustend la moitié de l'arc occupé par une dent. Nous avons la formule

$$c = 2\,r.\,\sin\tfrac{1}{2}\,\alpha$$

et

$$\alpha = \frac{360^\circ}{4 \times 60} = 1^\circ 30'.$$

On aura donc

$$c = 2 \times 540 \times \sin 0^\circ 45',$$

$$\log : 1080 = 3{,}0334238,$$

$$\log : \sin 0^\circ 45' = \underline{8{,}1169262},$$

$$\log : (1080, \sin 0^\circ 45') = 1{,}1503500.$$

Par suite on aura :

corde d'un quart de pas = 14,1367 mm.[1]

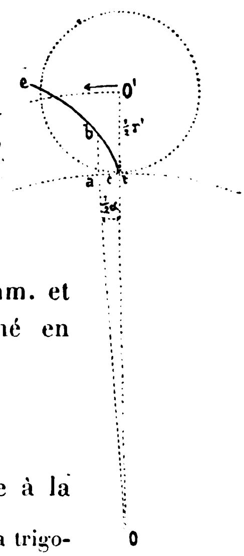


Fig. 77.

Portons cette longueur de t en a (fig. 77) et traçons le rayon Oa prolongé jusqu'au point b appartenant à l'épicycloïde de la dent.

Ob est alors le rayon total de la roue et ab la hauteur de l'ogive de la dent.

En mesurant ab, nous le trouvons égal à 25 mm. et nous aurons le rayon total de la roue exprimé en unités de pas diamétral par la somme

$$60 + \frac{2 \times 25}{18} = 60 + 2{,}77 = 62{,}77.$$

On placera donc le diamètre total de la roue à la

[1] On aurait pu aussi obtenir ce résultat sans l'aide de la trigonométrie, en remarquant que les arcs et les cordes de petits angles diffèrent très peu les uns des autres.

On aurait ainsi

$$\frac{2\,\pi\,r}{4 \times 60} = 4{,}5 \times 3{,}1416 = 14{,}1372,$$

valeur très rapprochée.

division 62,77 du compas, afin que son rayon primitif corresponde à la division 60.

288. On pourrait procéder d'une manière analogue pour le pignon. Remarquons cependant que, tandis que la hauteur de l'ogive de la roue est déterminée, puisqu'elle est formée par une épicycloïde décrite par un point d'une circonférence génératrice de rayon donné, l'excédent de l'aile du pignon ne l'est pas aussi simplement.

La forme de l'excédent que l'on rencontre dans un assez grand nombre de pignons est celle d'un demi-cercle de rayon égal à la moitié de la largeur d'une aile mesurée sur la circonférence primitive. Cette forme, vicieuse, nous le savons, surtout pour les pignons de bas nombres, offre cependant une facilité pour le calcul.

Soit, en effet, n' le nombre d'ailes du pignon.

Le diamètre primitif exprimé en fonction du pas diamétral sera de même n', puisqu'il est divisé en autant de parties égales que le pignon a d'ailes.

La circonférence primitive est donc

$$\text{circonf.} = \pi n'$$

et le pas de l'engrenage

$$\frac{\pi n'}{n'} = \pi.$$

Si ce pas comprend un tiers de plein et deux tiers de vide, la longueur de l'arc qui correspond à l'épaisseur d'une aile étant le double du rayon ρ du cercle de l'excédent, on aura

$$\rho = \frac{\pi}{2 \times 3}.$$

Il faut donc ajouter une valeur égale à ρ aux deux extrémités du diamètre primitif du pignon exprimé en unité de pas diamétral :

$$\text{rayon total} = n' + \frac{\pi}{3} = n' + 1{,}05.$$

Ainsi, pour les pignons dont la partie pleine du pas est égale à la moitié du vide et dont l'excédent a la forme d'un

demi-cercle, le diamètre total doit s'arrêter à la division correspondant au nombre d'ailes augmenté de 1,05.

Pour l'engrenage que nous considérons d'une roue de 60 dents et d'un pignon de 6 ailes, on devra placer la roue à la division 62,77 et le pignon à la divison 7,05.

289. Refaisons le calcul pour un pignon dont le plein de l'aile est les deux cinquièmes du pas (12 ailes et au-dessus).

Comme dans le cas précédent, le pas de l'engrenage est égal à π et le rayon de l'ogive

$$\rho = \frac{\pi}{5};$$

comme il faut ajouter 2ρ au diamètre primitif, nous aurons

$$2\rho = \frac{2\pi}{5} = 1,25.$$

Le diamètre total exprimé en unité de pas diamétral est donc

$$n' + 1,25.$$

290. Dans le cas de pignons à excédent demi-elliptique, la hauteur de cet excédent devient supérieure à celles que les calculs précédents nous ont fournies.

Nous avons vu que le calcul de cette valeur est compliqué (268 et suivants); aussi, sans entrer dans d'autres détails, nous renvoyons pour ces valeurs à la table que nous donnons plus loin (292, troisième colonne).

Ainsi, reprenant notre engrenage d'une roue de 60 dents et d'un pignon de 6 ailes, nous trouvons, dans cette table, qu'exprimé en unité de pas diamétral le diamètre total du pignon est de

$$7,1618,$$

c'est-à-dire 7,5 en chiffre rond.

291. Pratiquement, pour employer d'une manière convenable le compas de proportion, il faut donc commencer par examiner l'excédent des ailes du pignon, que nous estimerons en fonction de la largeur de l'aile.

Si l'on juge, par exemple, qu'il soit équivalent à la demi-

épaisseur de l'aile, on ajoutera une unité au nombre d'ailes n' ; si l'excédent paraît être les trois-quarts de l'épaisseur, on ajoutera 1,5 et, enfin, si la hauteur est jugée égale à 2 fois l'épaisseur de l'aile, on ajoutera 2.

Un microscope composé, avec oculaire pourvu de fils d'araignée et muni, dans sa partie inférieure, d'un chariot mu par une vis micrométrique permettant de promener l'objet observé dans le champ de l'instrument, peut mesurer, avec une grande précision, la hauteur des ogives de roues ou des excédents de pignons. A défaut de cet instrument, la méthode que nous venons d'indiquer, est assez exacte pour rendre service.

292. Le tableau que nous donnons ci-dessous, indique le chiffre de la division du compas pour les engrenages les plus employés en horlogerie. Ainsi, en plaçant une roue de 80 dents à la division 83,38 du compas, un pignon de 10 ailes, dans lequel elle doit engrener, devra correspondre à la division 11,5 si l'excédent est de forme demi-elliptique, ou à la division 11,05 si cette forme est demi-circulaire.

Pour le pignon impair de 7 ailes, on trouvera dans la table deux indications, l'une donnant le diamètre réel, l'autre permettant de placer le pignon en appuyant une des ailes contre une des branches du compas et les deux ailes vis-à-vis contre l'autre. Cette dernière mesure comprend donc, en unité de pas diamétral, un rayon total augmenté de la flèche OB (planche II).

D'après ce que nous avons dit, il sera facile d'obtenir d'une manière graphique les chiffres correspondant à des engrenages qui ne figurent pas dans cette table.

Table à l'usage du compas de proportion.

Désignation	Nombre de dents	Division du compas pour forme d'aile		Le rayon ou diamètre = 1 Forme d'aile	
		elliptique	circulaire	elliptique	circulaire
Roue	180	183,542	—	1,019676	—
Pignon	12	13,66	13,25	1,14	1,104
Roue	144	147,446	—	1,024	—
Pignon	10	11,5	11,05	1,15	1,105
Roue	96	99,747	—	1,03904	—
Pignon	12	13,66	13,25	1,14	1,104
Roue	80	83,3853	—	1,0423	—
Pignon	10	11,5	11,05	1,15	1,105
Roue	64	67,1	—	1,048475	—
Pignon	8	9,45	9,05	1,18	1,13
Roue	90	93,614	—	1,04016	—
Pignon	12	13,66	13,25	1,14	1,104
Roue	75	78,375	—	1,045	—
Pignon	10	11,5	11,05	1,15	1,105
Roue	60	63,0976	—	1,0511	—
Pignon	8	9,5	9,05	1,18	1,13
Roue	80	83,1247	—	1,039	—
Pignon	8	9,5	9,05	1,18	1,13
Roue	60	62,7839	—	1,0464	—
Pignon	6	7,4648	7,05	1,2441	1,175
Roue	70	72,9637	—	1,0423	—
Pignon	7	8,397	8,05	1,1995	1,15 diam. réel.
»	7	7,972	7,7	1,139	1,1 en appuyant 2 ailes d'un côté et 1 de l'autre.
Roue	48	50,77	—	1,0577	—
Pignon	6	7,4	7,05	1,23	1,175
Roue	36	38,74	—	1,0762	—
Pignon	6	7,4	7,05	1,23	1,175
Roue	30	32,72	—	1,0908	—
Pignon	6	7,4	7,05	1,23	1,175
Roue	36	38,55	—	—	—
Pignon	12	14,02	—	—	—
Roue	40	42,7	—	—	—
Pignon	10	11,52	—	—	—

293. — **Vérification du compas de proportion.** — Les deux règles divisées doivent être très droites et par conséquent se juxtaposer d'une manière parfaite lorsque l'instrument est fermé, ce que l'on vérifie en élevant le compas à la hauteur des yeux et en examinant si les deux règles s'appliquent parfaitement l'une contre l'autre.

La division doit être régulière et le point zéro doit se trouver au centre de la charnière.

Il est facile aussi de vérifier cette condition d'exactitude en prenant avec un compas à pointes sèches un certain nombre de divisions, 10 par exemple; en promenant ensuite ce compas sur toute la partie divisée, il est alors aisé de s'assurer de l'exactitude de cette condition. En plaçant enfin l'une des branches du compas sur la division 10, l'autre devra pouvoir se placer au centre de la charnière.

Cette charnière doit être exécutée de façon que l'écartement des règles puisse se faire sans secousse, c'est-à-dire à « frottement gras »; en aucun cas on ne peut tolérer de jeu ou ébat quelconque à cette charnière.

Le compas étant ainsi vérifié, on pourra l'employer avec l'aide de la table ci-dessus.

Il existe d'autres systèmes de compas de proportion, dont la plupart dispensent de l'emploi d'une table accessoire. Remarquons cependant que celui que nous venons de décrire a son principe fondé sur une base rationnelle et exacte et que la table qu'il nécessite n'en complique que peu ou pas l'usage.

294. **Détermination de la distance des centres d'un engrenage au moyen du compas de proportion et d'un compas aux engrenages.** — Ayant fixé le compas de proportion de façon que le rayon primitif de la roue corresponde au chiffre de son nombre de dents, on mesure, dans cette même ouverture, le diamètre de l'une des broches d'un compas aux engrenages. Soit d la division correspondant à cette dernière mesure. On ouvre alors le compas aux engrenages jusqu'à ce que les deux broches a et b, dessinées en coupe (fig. 78), correspondent à la division

$$\frac{n + n'}{2} + d.$$

Cette ouverture donne alors la distance des centres.

Exemple. — Ayant réglé l'ouverture d'un compas de proportion de façon que le diamètre total d'une roue de 60 dents soit ajusté à la division 62,78 (voir la table), on mesure la broche du compas aux engrenages et l'on constate que son diamètre correspond à la division 8; nous aurons ainsi

$$\frac{60 + 6}{2} + 8 = 41,$$

le pignon ayant 6 ailes. L'ouverture du compas aux engrenages doit donc être réglée de façon que les deux broches *a* et *b* correspondent à la division 41.

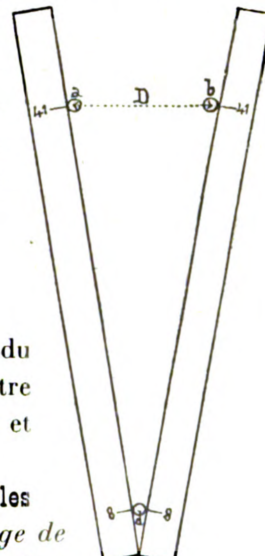


Fig. 78.

295. **Le compas de proportion et les engrenages de remontoir.** — 1° *Engrenage de la roue de couronne dans le rochet.* Les dentures de cet engrenage doivent être solides; c'est pour cette raison qu'on ne leur donne qu'un vingtième de jeu (242). Pour le même but, on exécute le fond des dents suivant une forme arrondie et l'ogive des dents est raccourcie. Ces engrenages sont épicycloïdaux, les profils sont formés par des épicycloïdes décrites par un point d'une circonférence génératrice plus petite que la moitié des circonférences primitives. Comme nous venons de le dire, on ne conserve pas pour la dent la totalité de l'arc d'épicycloïde : il est suffisant que le contact s'établisse aux $^3/_5$ du pas avant la ligne des centres pour se continuer jusqu'aux $^3/_5$ du pas au delà de cette ligne. Le « flanc » des dents n'est plus une ligne droite, mais une *hypocycloïde* décrite par un point du même cercle générateur roulant à l'intérieur de la circonférence primitive de la roue.

Ainsi (fig. 79) *ta* est l'arc d'épicycloïde utile, tandis que *ab* est une courbe quelconque raccourcissant la dent ; de cette façon, la hauteur de l'ogive n'est pas déterminée ; *td* est un arc d'hypocycloïde se rapprochant généralement beaucoup d'une ligne droite.

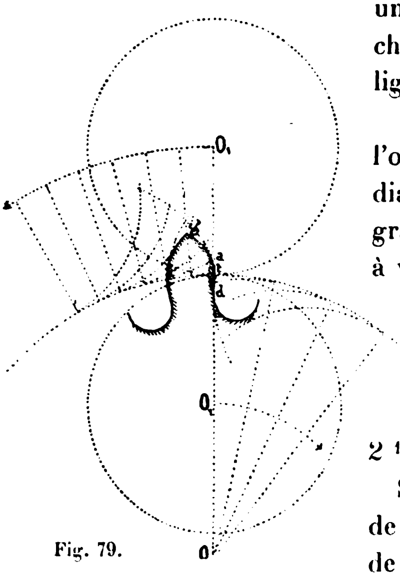


Fig. 79.

Pour déterminer la hauteur de l'ogive raccourcie en unité de pas diamétral, il faut procéder par voie graphique ou par simple estimation à vue d'œil.

Généralement, pour cet engrenage, la hauteur des deux ogives placées vis-à-vis l'une de l'autre peut être prise comme $2\,^1/_4$ pas diamétral.

Si donc n et n' sont les nombres de dents, il faudra ajuster la roue de couronne à la division

$$n' + 2\,^1/_4$$

et, de même, le rochet à la division

$$n + 2\,^1/_4.$$

Remarquons cependant que, puisque la roue de couronne conduit toujours le rochet, il est préférable d'exécuter la première proportionnellement plus grande que la seconde ; par exemple :

roue de couronne, division $n' + 2\,^1/_3$;
roue de rochet,.... division $n + 2\,^1/_4$.

296. **Engrenage du pignon de remontoir dans les dents de « champ » de la roue de couronne.** — Dans ces engrenages, les axes des deux mobiles forment entre eux un angle droit. Logiquement, un tel engrenage devrait être un *engrenage conique* (320) ; dans la pratique de l'horlogerie, il suffit cependant de s'en rapprocher artificieusement.

On rencontre deux dispositions générales de ce système.

Dans la première (fig. 80), *ab* est le diamètre extérieur des dents de « champ » de la roue de couronne ; c'est en même temps son diamètre primitif, car l'ogive des dents ne vient pas s'ajouter à l'extrémité du rayon, puisqu'elles sont perpendiculaires au plan de la roue. Il faut donc ajuster la roue de couronne à la division n' de ses dents et le diamètre total *cd* du pignon, perpendiculaire en *b* sur *ab*, à la division $n + 2\,^1/_4$, comme dans le cas précédent et pour les mêmes raisons. Donc

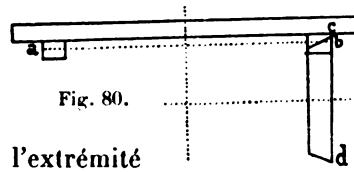


Fig. 80.

pignon de remontoir, division $n + 2\,^1/_4$;
denture de « champ » roue de couronne, division n'.

La deuxième disposition se rencontre dans quelques mécanismes de remontoir. Elle comporte une denture de « champ » de couronne en dehors de son rayon primitif (fig. 81) ; dans ce cas, il faudra ajouter la hauteur des deux ogives également aux deux mobiles. On aura donc :

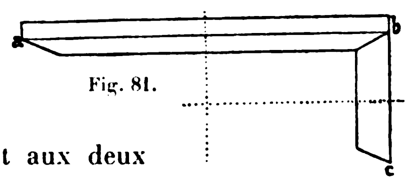


Fig. 81.

pignon de remontoir, division $n + 2\,^1/_4$;
roue de couronne, division $n + 2$.

297. **Engrenage du pignon coulant et du petit renvoi.** — Quoiqu'on ne puisse se servir du compas de proportion pour l'étude des dimensions relatives à donner aux mobiles de cet engrenage et que cette détermination soit uniquement question de calcul, nous en donnons cependant ici la théorie, qui ne s'y trouve pas déplacée.

Soit (fig. 82) r le rayon primitif du petit renvoi, R son rayon total et n le nombre de ses dents ; r' le rayon du pignon coulant aboutissant au bas de la roue de renvoi, R' son rayon total et n' le nombre de ses dents.

Dans les cas les plus ordinaires, on peut admettre que

$$R' - r' = 0{,}2 \text{ mm.};$$

par suite

$$r' = R' - 0{,}2$$

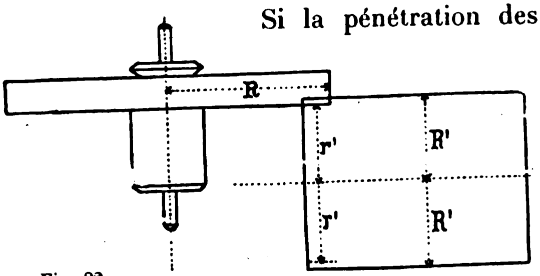


Fig. 82.

Si la pénétration des deux mobiles est plus considérable, l'engrenage ne se fait pas bien.

Le plus généralement, il s'agit en pratique de déterminer le nombre de dents n' du pignon coulant.

La proportion

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'}$$

nous donne la valeur

(1) $$n' = n\,\frac{r'}{r}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de (295), on peut poser

$$\frac{r}{R} = \frac{n}{n+2},$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{R\,n}{n+2}.$$

Remplaçant r et r' par leur valeur dans l'équation (1), il vient

$$n' = \frac{n\,(R' - 0{,}2)}{\dfrac{R\,n}{n+2}}$$

ou

(2) $$n' = \frac{(R' - 0{,}2)\,(n+2)}{R}.$$

Exemple. — Soit $R = 2{,}4$, $R' = 2$ et $n = 18$, la formule (2) donne

$$n' = \frac{(2 - 0{,}2)\,(18+2)}{2{,}4} = \frac{1{,}8 \times 20}{2{,}4} = 15 \text{ dents.}$$

298. **Engrenages de la minuterie.** — Le *petit* et le *grand renvoi* se placent dans le compas de proportion à la division correspondant à leur nombre de dents augmenté de deux. Donc,

petit renvoi, division $n + 2$;
grand renvoi, division $n' + 2$.

Pour l'engrenage de la *chaussée* et de la *roue de minuterie*, il en est généralement de même; cependant il faut toujours prendre garde à la forme que possède l'excédent des ailes de la chaussée. Si les ailes étaient terminées par une forme demi-circulaire, il faudrait dans ce cas placer le pignon à la division correspondant au nombre d'ailes augmenté de 1. Parfois aussi les dents de la roue de minuterie sont formées de telle façon qu'on est obligé d'ajouter 2,5 ou même 3 à leur nombre pour obtenir la division du compas à laquelle il faut placer cette roue.

Pour vérifier d'une seule fois la suite de rapports des roues de mise à l'heure, il faut ajuster la chaussée à la division cerrespondant à son nombre d'ailes augmenté de 2, et les autres roues, minuterie, grand et petit renvois, devront de même correspondre à la division de leur nombre de dents respectif augmenté de 2.

S'il devait y avoir un léger défaut, il vaut toujours mieux que la roue qui conduit, soit un peu grande. Comme on aime dans ce rouage une transmission douce et facile, et comme le petit renvoi est la roue qui conduit, on peut l'admettre très peu plus grand que ne le donnerait une proportion rigoureuse.

L'engrenage du *pignon de minuterie* et de la *roue à canon* est soumis à une même loi et avec les mêmes réserves pour les formes diverses d'excédents qui se rencontrent en pratique. Le plus généralement cependant on a :

pignon de minuterie, division $n + 2$;
roue à canon, division . . . $n' + 2$.

Calculs divers relatifs aux engrenages.

299. La table précédente (292) donne, pour les divers engrenages qu'elle comprend, un deuxième facteur exprimant le rayon ou diamètre total du mobile en fonction du rayon ou diamètre primitif égal à l'unité. L'emploi de ces facteurs est important dans les cas où il s'agit de déterminer les dimensions totales des roues d'un engrenage au moyen d'un calcul rapide, par exemple pour la construction des calibres. La résolution des problèmes suivants nous familiarisera rapidement avec l'usage de cette table.

300. *Etant donné le rayon primitif d'une roue, on demande de calculer son rayon total R.* — Pour résoudre cette question, il faut connaître le nombre de dents de la roue et le nombre d'ailes du pignon dans lequel elle doit engrener. On cherche alors dans la seconde colonne de la table les chiffres de la denture de l'engrenage; la valeur correspondante indiquée dans la cinquième colonne donne le facteur par lequel il faut multiplier le rayon primitif de la roue pour obtenir son rayon total. On aura donc

$$R = r \times \text{facteur de la table.}$$

Si, par exemple, le rayon primitif r d'un barillet de 80 dents vaut 10 mm. et que cette roue doive engrener dans un pignon de grande moyenne de 10 ailes, le facteur indiqué par la table est 1,0423; donc

$$R = 10 \times 1{,}0423 = 10^{mm}423.$$

Si nous avions à calculer le rayon total d'un barillet de 96 dents, dont le rayon primitif soit également de 10 mm. et engrenant dans un pignon de 12 ailes, nous aurions :

$$R = 10 \times 1{,}03904 = 10^{mm}3904.$$

On voit que le rayon total du dernier barillet est un peu plus faible que celui du premier.

301. *Etant donné le rayon total d'une roue, déterminer son*

rayon primitif. — Cete question est inverse de la précédente et se résout par conséquent en divisant le rayon total donné par le facteur tabulaire. Donc

$$r = \frac{R}{\text{facteur tabulaire}}.$$

Numériquement on a, si $R = 10{,}423$, $n = 80$ et $n' = 10$,

$$r = \frac{10{,}423}{1{,}0423} = 10.$$

302. *Etant donné le rayon primitif d'un pignon, calculer son rayon total et, réciproquement, étant donné le rayon total d'un pignon, trouver son rayon primitif.* — Comme pour la roue, dans le premier cas, on multiplie le rayon primitif donné par le facteur de la table et, dans le second, on divise le rayon total par ce facteur. On a donc

$$R' = r' \times \text{facteur tabulaire}$$

ou

$$r' = \frac{R'}{\text{facteur tabulaire}}.$$

Comme pour le compas de proportion, la table donne deux facteurs pour chaque pignon, l'un convenant pour un excédent demi-elliptique, l'autre pour un excédent demi-circulaire.

Soit, par exemple, $r' = 1{,}25$ et $n' = 10$ forme demi-circulaire ; on aura

$$R' = 1{,}25 \times 1{,}105 = 1{,}38125$$

ou

$$r' = \frac{1{,}38125}{1{,}105} = 1{,}25.$$

Si l'excédent était de forme demi-elliptique, on aurait

$$R' = 1{,}25 \times 1{,}15 = 1{,}4375$$

ou, pour le problème inverse,

$$r' = \frac{1{,}4375}{1{,}15} = 1{,}25.$$

303. *Etant donné le rayon primitif d'une roue, on cherche le rayon total du pignon dans lequel elle engrène (forme demi-elliptique).* — On a la proportion

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

qui donne la valeur

$$r' = r\frac{n'}{n};$$

et, puisque

$$R' = r' \times \text{fact. tab.},$$

on obtient, en remplaçant r' par sa valeur,

$$R' = r\frac{n'}{n} \times \text{fact. tab.}$$

Soit, comme exemple,

$$r = 5{,}38,\quad n = 75,\quad n' = 10;$$

on aura

$$R' = 5{,}38 \times \frac{10}{75} \times 1{,}15 = 0{,}8249.$$

304. *Etant donné le rayon primitif d'un pignon, on demande le rayon total de la roue.* — Nous avons

$$r = r'\frac{n}{n'}$$

et

$$R = r \times \text{fact. tab.} = r'\frac{n}{n'} \times \text{fact. tab.},$$

soit

$$r' = 0{,}86,\quad n = 80,\quad n' = 10.$$

On écrira

$$R = 0{,}86 \times \frac{80}{10} \times 1{,}0423 = 7{,}17.$$

305. *Etant donné le rayon total de la roue, on demande le rayon total du pignon.* — Nous avons

$$r = \frac{R}{\text{fact. tab. de la roue}}$$

et

$$r' = r\frac{n'}{n};$$

en remplaçant, il vient

$$r' = \frac{n'}{n} \cdot \frac{R}{\text{fact. tab. de la roue}}.$$

Ensuite

$$R' = r' \text{ fact. tab. du pignon},$$

par conséquent

$$R' = R \frac{n'}{n} \frac{\text{fact. tab. du pignon}}{\text{fact. tab. de la roue}}.$$

Soit, comme exemple :

$$R = 10{,}2, \quad n = 80, \quad n' = 10.$$

$$\text{Facteurs tabulaires} \begin{cases} \text{roue} & = 1{,}0423 \\ \text{pignon} & = 1{,}15. \end{cases}$$

On aura

$$R' = 10{,}2 \times \frac{10}{80} \times \frac{1{,}15}{1{,}0423} = 1{,}4067.$$

306. *Etant donné le rayon total du pignon, on demande le rayon total de la roue.* — D'une manière analogue au cas précédent, on aura

$$r' = \frac{R'}{\text{fact. tab. pign.}}$$

et

$$r = r' \frac{n}{n'},$$

d'où

$$r = \frac{R'}{\text{fact. tab. pign.}} \frac{n}{n'}.$$

Et comme

$$R = r.\ \text{fact. tab. de la roue},$$

on a enfin

$$R = R' \frac{n}{n'} \frac{\text{fact. tab. de la roue}}{\text{fact. tab. du pign.}}.$$

Soit

$$R' = 1{,}4067, \quad n = 80, \quad n' = 10,$$

on aura

$$R = \frac{1{,}4067 \times 80 \times 1{,}0423}{10 \times 1{,}15} = 10{,}2.$$

307. *Etant donnés la distance des centres et les nombres de dents d'un engrenage, déterminer les diamètres totaux de la roue et du pignon.* — Nous connaissons les formules (192) :

$$r = D \frac{n}{n + n'} \quad \text{et} \quad r' = D \frac{n'}{n + n'},$$

et comme

$$R = r.\ \text{fact. tab. roue},$$
$$R' = r'.\text{fact. tab. pignon},$$

on a

$$R = D \frac{n}{n + n'} .\ \text{fact. tab. roue},$$

$$R' = D \frac{n'}{n + n'} .\ \text{fact. tab. pignon},$$

soit

$$D = 5{,}2. \quad n = 70. \quad n' = 7.$$

$$\text{Facteurs tabulaires} \begin{cases} 1{,}0423 \text{ pour la roue}, \\ 1{,}1995 \text{ pour le pignon}. \end{cases}$$

On aura

$$2\,R = \frac{5{,}2 \times 70 \times 1{,}0423 \times 2}{77} = 9{,}854,$$

$$2\,R' = \frac{5{,}2 \times 7 \times 1{,}1995 \times 2}{77} = 1{,}134.$$

308. *Etant donnés le rayon total de la roue et les nombres de dents de l'engrenage, on demande la distance des centres des deux mobiles.* — La formule

$$r = D \frac{n}{n + n'}$$

donne

$$D = r \frac{n + n'}{n},$$

et comme

$$r = \frac{R}{\text{fact. tab. roue}},$$

on aura

$$D = \frac{R}{\text{fact. tab. roue}} . \frac{n + n'}{n},$$

soit

$$R = 4{,}927. \quad n = 70. \quad n' = 7.$$

$$\text{Facteur tabulaire de la roue} = 1{,}0423.$$

On pose

$$D = \frac{4{,}927 \times 77}{1{,}0423 \times 70} = 5{,}2.$$

309. *Etant donnés le rayon total R' d'un pignon et les nombres n et n' de dents de l'engrenage, déterminer la distance des centres D.* — D'une manière analogue au cas précédent, nous pourrons écrire la formule

$$D = \frac{R'}{\text{fact. tab. pign.}} \cdot \frac{n + n'}{n'};$$

soit

$$R' = 0{,}567. \ n = 70. \ n' = 7,$$
$$\text{facteur tabulaire} = 1{,}1995 ;$$

on aura

$$D = \frac{0{,}567 \times 77}{1{,}1995 \times 7} = 5{,}2.$$

310. *Etant donnés le diamètre P d'une platine de montre, les nombres de dents n du barillet et n' du pignon de centre, on demande de déterminer : 1° les rayons primitifs r et r' de la roue et du pignon ; 2° la distance des centres D des deux mobiles ; 3° les rayons totaux R et R'. Le diamètre du barillet doit être le plus grand possible.* — Cette question est généralement une des premières qui se posent lors de l'établissement d'un nouveau calibre de montre.

Afin de pouvoir ajuster la platine d'une montre dans sa boîte, on pratique généralement à l'extérieur de cette platine une « retranche », que l'on peut évaluer égale à la soixantième partie du diamètre total P. Il n'en reste donc que les $^{59}/_{60}$ d'utilisables. Le rayon utile est par conséquent :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{59}{60} P = \frac{59}{120} P.$$

L'extrémité de la denture du barillet peut coïncider avec l'extrémité de ce rayon, les dents trouvant le jour nécessaire dans la partie intérieure évidée de la carrure.

Le rayon $\frac{59}{120}$ P devra être égal à la somme des longueurs suivantes : le rayon primitif r' du pignon de centre, le rayon primitif du barillet et son rayon total (fig. 83).

Nous aurons donc

$$\frac{59}{120}\,P = r' + r + R.$$

Mais comme

$$r' = r\,\frac{n'}{n}$$

et

$$R = r \text{ fact. tabul.},$$

on aura aussi

$$\frac{59}{120}\,P = r\,\frac{n'}{n} + r + r.\text{ fact. tab.},$$

ou encore

$$\frac{59}{120}\,P = r\left(\frac{n'}{n} + 1 + \text{fact. tab.}\right);$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\frac{59}{120}\,P}{\frac{n'}{n} + 1 + \text{fact. tabul.}}.$$

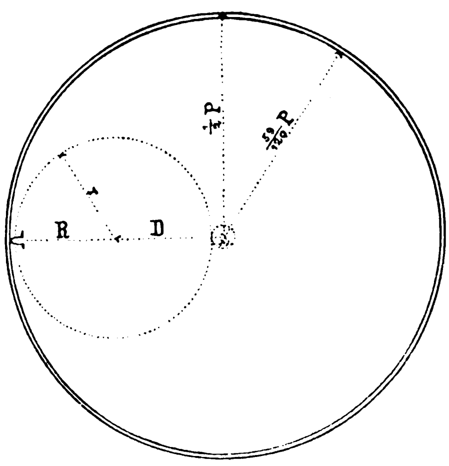


Fig. 83.

Connaissant r, il est facile de déterminer r', puisque

$$r' = r\,\frac{n'}{n};$$

la distance des centres D sera ensuite déterminée par la somme des deux rayons primitifs.

Connaissant r et r', on calculera les rayons totaux R et R' par l'opération :

$R = r$. fact. tab. de la roue.
$R' = r'$. fact. tab. du pignon.

Soit, comme exemple :

$$P = 43 \text{ mm. (19 lignes) } n = 80 \text{ et } n' = 10.$$

Facteur tabulaire de la roue = 1,0423.

Facteur tabulaire du pignon = 1,15.

On aura :

$$r = \frac{\frac{59}{120} \times 43}{\frac{1}{8} + 1 + 1{,}0423},$$

ou bien

$$r = \frac{59 \times 43}{120\,(\frac{1}{8} + 1 + 1{,}0423)} = \frac{59 \times 43}{260{,}076}$$

et

$$r = 9{,}7548.$$

Ensuite

$$r' = \frac{9{,}7548}{8} = 1{,}21935.$$

Puis

$$D = 9{,}7548 + 1{,}2193 = 10{,}9741,$$

et enfin

$$R = 9{,}7548 \times 1{,}0423 = 10{,}17$$
$$R' = 1{,}2193 \times 1{,}15 = 1{,}4.$$

Comme on a

$$\frac{59}{120} \cdot 43 = 21{,}1416,$$

on devra avoir de même, ou à peu de chose près,

$$r' + r + R = 21{,}1416.$$

L'addition donne :

$$\begin{array}{r} 1{,}2193 \\ 9{,}7548 \\ 10{,}17 \\ \hline 21{,}1441 \end{array}$$

Avec cette approximation, le résultat est suffisant.

311. *Etant donnés le rayon total R' du pignon dans lequel engrène la crémaillère d'une répétition, le nombre n' de dents suivant lequel ce pignon est divisé*[1] *et le rayon*

[1] On sait que la division de ce pignon par la denture n'est pas complète par la raison que ce mobile n'exécute qu'une fraction de tour. Le pas de l'engrenage laissé plein facilite l'arrêt du mouvement.

total R de la crémaillère, on demande le nombre suivant lequel il faut tailler le secteur de cette dernière roue.

Admettons l'ogive de la denture des deux mobiles égale à deux fois le pas diamétral (286). Nous aurons le rayon primitif du pignon par la formule

$$r' = \frac{R'\,n'}{n' + 2}$$

et celui de la roue

$$r = \frac{R\,n}{n + 2}.$$

Comme on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{n'}{n},$$

on peut aussi écrire

$$\frac{n'}{n} = \frac{\dfrac{R'\,n'}{n' + 2}}{\dfrac{R\,n}{n + 2}} = \frac{R'\,n'\,(n + 2)}{R\,n\,(n' + 2)}$$

d'où

$$n'.\,R\,n\,(n' + 2) = n.\,R'\,n'\,(n + 2)$$

et, en simplifiant,

$$R\,(n' + 2) = R'\,(n + 2).$$

On obtient enfin

$$n = \frac{R}{R'}\,(n' + 2) - 2.$$

Soit, par exemple, $R = 9{,}96$, $R' = 1{,}8$, $n' = 13$, nous aurons :

$$n = \frac{9{,}96 \times 15}{1{,}8} - 2 = 81 \text{ dents.}$$

Remarque. — On peut obtenir directement la formule ci-dessus d'une proportion analogue à celle de 298.

$$\frac{R}{R'} = \frac{n + 2}{n' + 2}.$$

312. Le calcul suivant ne trouve pas uniquement sa solution dans la théorie des engrenages, mais aussi dans celles du rouage et de la force motrice. Il résume, à notre idée,

d'une manière excellente, les études que nous avons parcourues ; aussi n'hésitons-nous pas à terminer cette série de problèmes en liant entre elles quelques-unes des diverses questions que nous avons traitées dans ce chapitre et dans ceux qui l'ont précédé.

313. **Problème.** — Un horloger a construit une montre à remontoir dont le diamètre de la platine a 50 mm. (22 lignes). En remontant la montre, il remarque que la force nécessaire pour opérer le remontage, c'est-à-dire pour vaincre la force que le ressort oppose au mouvement, est trop considérable. Il se propose alors de fabriquer une nouvelle montre, pareille à la première, mais dont le remontage puisse s'effectuer d'une manière plus facile. Il doit donc modifier la valeur des deux facteurs qui entrent dans l'expression du travail mécanique : *la force* d'un côté et le *temps* employé au remontage de l'autre, ou, autrement dit, l'*espace* parcouru par le point d'application de la force active (39).

La première montre a son barillet muni d'un arrêtage de 4 tours et marche pendant 32 heures ; la seconde doit marcher pendant le même nombre d'heures. Il est évident que, si nous introduisons dans la seconde montre un barillet muni d'un arrêtage lui permettant d'exécuter 5 rotations pendant 32 heures, nous aurons diminué l'intensité moyenne de la force et augmenté en même temps la durée du remontage.

Recherchons donc la nature et la valeur des changements qu'il faut opérer dans la deuxième construction pour arriver au but désiré.

314. En premier lieu, il faut changer le rapport des nombres de dents du barillet et d'ailes du pignon de grande moyenne.

Dans la première montre, ce rapport était $\frac{96}{12}$, ce qui donnait une durée de marche de

$$\frac{96}{12} \times 4 = 32 \text{ heures.}$$

Dans la seconde montre, on devra avoir aussi

$$\frac{n}{n'} \times 5 = 32 \text{ heures}$$

ou

$$\frac{n}{n'} = \frac{32}{5} = 6,4.$$

En choisissant un pignon de 10 ailes, on aura

$$n = 6,4 \times 10 = 64 \text{ dents,}$$

ou, avec un pignon de 15 ailes :

$$n = 6,4 \times 15 = 96 \text{ dents.}$$

Il n'est pas d'une nécessité absolue, en général, de conserver le rapport ci-dessus d'une manière très rigoureuse. Ainsi, si l'on voulait un pignon de 12 ailes, on aurait

$$n = 6,4 \times 12 = 76,8 \text{ dents;}$$

ce nombre fractionnaire n'étant pas réalisable, admettons, par exemple,

$$n = 78 \text{ dents.}$$

Nous aurions alors

$$\frac{78}{12} \times 5 = 32,5 \text{ heures.}$$

La montre marcherait, avec les nombres ci-dessus, une demi-heure de plus qu'il est désiré.

Comme, pour une montre de 50 mm. de diamètre, un barillet de 96 dents ne donne pas une denture trop faible, on peut accepter pour cet engrenage :

96 dents pour le barillet,
15 ailes pour le pignon de grande moyenne.

315. Il faut maintenant calculer les rayons primitifs des deux mobiles et leur distance des centres. Commençons par rechercher ces valeurs pour la première montre, afin de comparer les résultats.

La formule que nous avons déterminée (310), nous donne

$$r = \frac{\frac{59}{120} \times 50}{\frac{12}{96} + 1 + 1,039}$$

et, calcul fait,

$$r = 11,36.$$

Ensuite

$$r' = r\frac{n'}{n} = 11,36.\ \frac{12}{96} = 1,42$$

et

$$D = 11,36 + 1,42 = 12,78.$$

Les rayons totaux des deux mobiles étaient

$$R = 11,36 \times 1,039 = 11,803.$$
$$R' = 1,42 \times 1,14 = 1,619.$$

Pour la seconde montre, les calculs sont naturellement analogues. Seulement nous avons ici le cas d'un engrenage dont les dentures ne se trouvent pas dans la table.

On peut dans ce cas admettre, par analogie, le facteur tabulaire de la roue égal à 1,04, en forçant légèrement le chiffre du facteur de l'engrenage précédent, puisque la hauteur de l'ogive doit augmenter avec un pignon plus grand (15 ailes au lieu de 12).

Pour le pignon, nous admettrons un excédent de forme demi-circulaire très admissible pour ce nombre d'ailes.

Nous aurons ainsi :

$$r = \frac{\frac{59}{120} \times 50}{\frac{15}{96} + 1 + 1,04}$$

et, calcul fait,

$$r = 11,19;$$

puis

$$r' = 11,19\,\frac{15}{96} = 1,748.$$

Par suite,

$$D = 11,19 + 1,748 = 12,938.$$

Pour le premier cas, nous avons le moment

$$F = \frac{E h e^3 2 \pi n}{12 L},$$

et pour le second

$$\frac{4}{5} F = \frac{E h e'^3 2 \pi \frac{5}{4} n}{12 L \frac{e}{e'}},$$

en remarquant que la longueur L augmente en raison inverse de la diminution de l'épaisseur e.

On pourra donc poser :

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{E h e^3 2 \pi n}{12 L} = \frac{E h e'^3 2 \pi \frac{5}{4} n}{12 L \frac{e}{e'}},$$

d'où, en simplifiant, on obtient

$$\frac{4}{5} e^3 = \frac{\frac{5}{4} e'^3}{\frac{e}{e'}}$$

et

$$\frac{4}{5} e^4 = \frac{5}{4} e'^4;$$

puis

$$25 e'^4 = 16 e^4,$$

d'où

$$e' = e \sqrt[4]{\frac{16}{25}} = e \sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Pour $e = 0{,}21$, on a

$$e' = 0{,}21 \times 0{,}894427 = 0{,}18826.$$

319. Puisque nous avons la proportion

$$\frac{L}{L'} = \frac{e'}{e}$$

on pourra enfin calculer la nouvelle longueur du ressort en posant

$$L' = L \frac{e}{e'};$$

donc

$$L' = \frac{1}{0,894427} \cdot 780,$$

et

$$L' = 872 \text{ mm}.$$

Comme le second barillet est un peu plus petit que le premier, ce ressort le remplira un peu plus que le tiers, mais, comme il est aussi plus mince, on peut diminuer la bonde proportionnellement à l'épaisseur relative du ressort (113).

Ainsi, la première bonde ayant un rayon égal au tiers du rayon intérieur du barillet, celui-ci valait

$$\frac{11}{3} = 3^{mm}66.$$

Ce rayon étant 17,777... fois plus grand que l'épaisseur du ressort, la seconde bonde pourra avoir

$$17,777 \times 0,18826 = 3^{mm}34....$$

320. Nous connaissons en outre le moyen d'augmenter la facilité du remontage en augmentant les nombres de dents du rochet et de la denture de « champ » de la roue de couronne ; comme nous avons déjà traité cette question (174), nous n'y reviendrons plus ici et nous admettrons ainsi, comme résolu, le problème proposé.

Engrenages coniques.

321. Dans les engrenages que nous venons d'étudier, les deux axes sont parallèles entre eux et nous savons que le mouvement du système peut être assimilé à celui de deux *cylindres* se conduisant mutuellement par simple contact. Nous avons désigné les engrenages de ce genre par la dénomination d'*engrenages cylindriques*.

322. Si, au lieu d'être parallèles, les deux axes sont concourants, on peut imaginer que le mouvement de l'un produise le mouvement de l'autre par le contact de deux *cônes*

concentriques à chacun des deux axes (fig. 84). Ce système prend alors le nom d'*engrenage conique*.

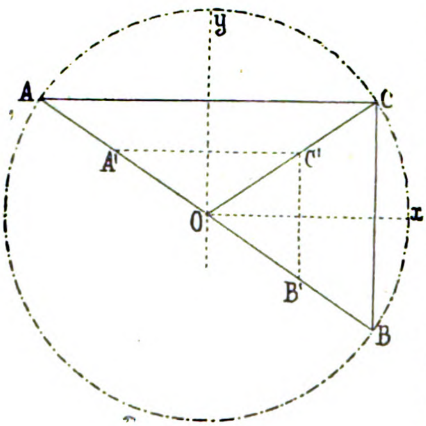


Fig. 84.

Les deux axes peuvent former un angle quelconque entre eux ; nous traiterons particulièrement le cas spécial où cet angle est droit, cas presque unique en horlogerie.

Soit (fig. 84) Ox et Oy, deux axes perpendiculaires autour desquels tournent les deux cônes COB et AOC ; admettons que leur mouvement se produise sans glissement.

Comme pour les engrenages cylindriques, on peut prouver que le rapport des angles parcourus par les deux cônes est inversement proportionnel à celui des diamètres CB et AC.

Les diamètres peuvent être mesurés d'une manière quelconque, pourvu que leurs circonférences soient tangentes. Ainsi, au lieu de CB et AC, on peut tout aussi bien prendre C'B' et A'C', puisque ces droites forment les côtés de triangles semblables.

α et α' étant les angles parcourus dans le même temps par les deux cônes, on a donc la proportion

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

et comme, n et n' étant les nombres de dents,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n}{n'},$$

on aura aussi

$$\frac{AC}{CB} = \frac{n}{n'}.$$

323. Le *pas* p de l'engrenage varie avec la distance OC; pour un même point de contact C, il est

$$p = \pi \frac{AC}{n} = \pi \frac{BC}{n'}.$$

324. **Forme des dents.** — Comme pour les engrenages cylindriques, la transmission du mouvement ne peut pratiquement s'opérer par le simple contact des deux *cônes primitifs*; on est le plus souvent obligé d'armer ces cônes de saillies, c'est-à-dire de dents qui leur permettent de se mouvoir comme s'ils se conduisaient par simple adhérence. Par suite, le contact ne se trouve pas toujours sur la ligne OC; si nous l'envisageons au point C, le déplacement de ce contact doit avoir lieu sur la surface d'une sphère dont le centre est en O et passant par les points ACB. C'est sur cette sphère qu'il faudrait tracer la forme des dents.

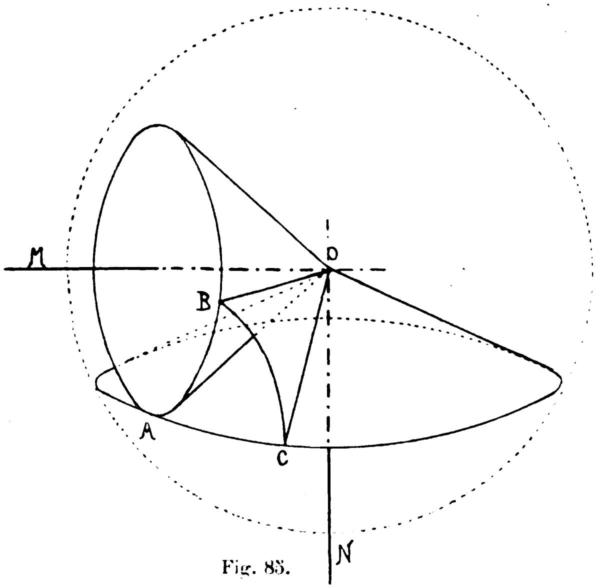


Fig. 85.

Ainsi, MO et OC (fig. 85) étant les deux axes de rotation qui se rencontrent au point O, prenons ce point comme centre d'une sphère : celle-ci renfermera les deux cônes

droits ayant, comme nous venons de le dire, leur sommet commun au centre O et les coupera suivant les deux circonférences du cercle de leurs bases, tangentes au point A qui appartient à la génératrice de contact des deux cônes.

Ces circonférences se conduiront exactement de même que les circonférences primitives d'un engrenage cylindrique, situées dans un même plan. La sphère jouant le rôle du plan considéré dans le premier cas, toutes les propriétés déjà déterminées se reproduisent ici.

Ainsi, on peut déterminer la courbe décrite par un point d'une des circonférences primitives en faisant rouler un des cônes sur l'autre immobile ; la courbe ainsi engendrée est l'*épicycloïde sphérique* BC.

Par suite de la similitude des méthodes employées dans ce cas avec celles que nous avons précédemment décrites, nous n'entrerons pas dans tous les détails de ces constructions.

325. Examinons cependant le cas des *engrenages à flancs*. Le flanc étant un plan diamétral du cône primitif, la dent conductrice sera une surface conique dont il faut déterminer la forme.

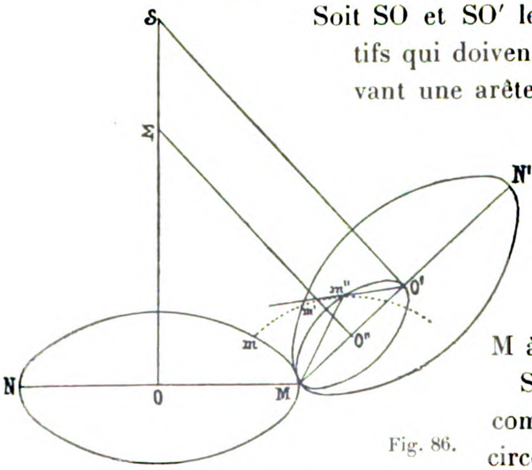


Fig. 86.

Soit SO et SO′ les axes des deux cônes primitifs qui doivent tourner en se touchant suivant une arête SM (non représentée sur la figure 86). Soit MmN et Mm'N′ les circonférences des cercles provenant de l'intersection des deux cônes par des plans menés perpendiculairement par le point M à leurs axes respectifs.

Sur le rayon MO′ du cercle O′ comme diamètre, on décrit une circonférence O″ et, par son centre O″, on élève une perpendiculaire sur son plan ; cette perpendiculaire rencontrera l'axe en un point Σ.

Si l'on considère ce point Σ comme le sommet commun de

deux cônes ayant pour bases les deux cercles O et O'' et qu'on fasse rouler le deuxième cône ($\Sigma O''$) sur le premier (ΣO), un point de la circonférence O'' décrira une courbe mm'', une *épicycloïde sphérique*, située sur la sphère sur laquelle se meut le cercle O'' lui-même, sphère ayant son centre en Σ.

Que par cette épicycloïde on fasse passer un cône qui ait le point S pour sommet, ce cône sera la surface-enveloppe d'un plan diamétral du cône SO' et devra par conséquent être pris pour la surface du cône SO. Ce résultat paraît évident d'après la similitude de la construction des engrenages cylindriques ; aussi n'ajouterons-nous pas d'autre preuve à l'appui de ce développement par analogie.

326. Outre la forme épicycloïdale, on emploie aussi la forme en développante de cercle pour les dents des engrenages coniques.

327. *Construction des engrenages coniques.* — D'après ce qui précède, toutes les lignes qui entrent dans les engrenages coniques étant définies, ce n'est qu'une application des principes de la géométrie descriptive d'en déduire les tracés nécessaires à sa construction. Mais il est inutile d'entrer dans des détails étendus à cet égard, vu que, dans la pratique, on a adopté une méthode plus simple et suffisamment exacte.

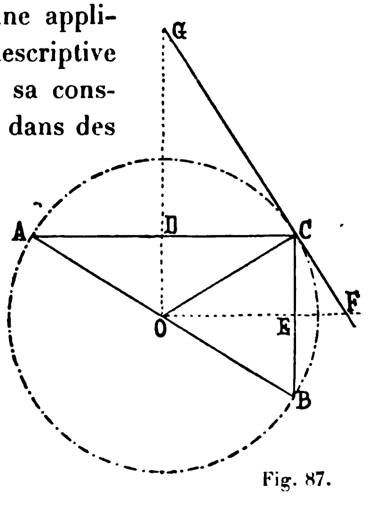


Fig. 87.

Pour représenter ces formes d'une manière plus commode sur le papier, on substitue à la surface sphérique la surface plane projetée en FCG (fig. 87), perpendiculaire à la ligne de tangence des cônes primitifs OC. Sur cette surface, on représente les surfaces développées des deux cônes AGC et BFC (fig. 88).

Dans le développement du cône OD, la circonférence projetée en ADC deviendra un cercle incomplet ACA, de rayon

AG de même longueur que cette circonférence. Pareillement, le cône OE développé donnera un arc de cercle de même longueur que la circonférence projetée en CEB.

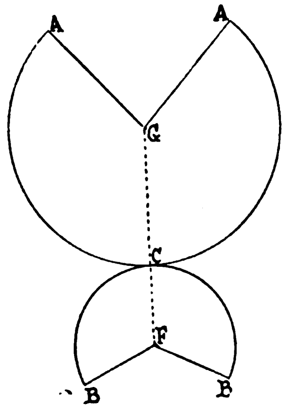


Fig. 88.

C'est sur ces circonférences que l'on reporte les longueurs correspondant au pas de l'engrenage déterminé sur les circonférences de rayons AD et CE des bases des deux cônes. On trace ensuite la forme des dents des deux mobiles, comme on le fait sur les circonférences primitives des engrenages cylindriques.

Ces formes sont sensiblement égales à celles que l'on obtiendrait sur les surfaces sphériques elles-mêmes, vu que, pour la faible dimension d'une dent, la surface du plan et celle de la sphère se confondent à peu près.

Dans le but de pouvoir comparer la forme des dents d'un engrenage conique avec celle du tracé, on termine ces roues par une portion des cônes CGA et CBF (fig. 87).

328. En horlogerie, cependant, on ne peut procéder ainsi, soit que la place fasse défaut ou que la roue porte en même temps une autre denture, comme la roue de couronne des engrenages de remontoir, par exemple. Les surfaces extérieures des deux roues sont alors des plans droits perpendiculaires aux axes.

Admettons pour ce cas que les plans extérieurs des deux mobiles se rencontrent en C (fig. 89) et recherchons la forme des dents coupées par le plan CB. C'est, en effet, sur ce plan que nous voyons la forme de la denture et que nous en pouvons déterminer la mesure.

Traçons d'abord les deux cônes primitifs COB et AOC, ce dernier n'étant représenté que par sa moitié DOC ; menons la perpendiculaire FG à OC et une parallèle F'G' à FG, enfin les circonférences primitives de rayons F'C et G'C, et déter-

minons la forme des dents suivant la méthode connue.

Pour obtenir une projection horizontale de la dent de la

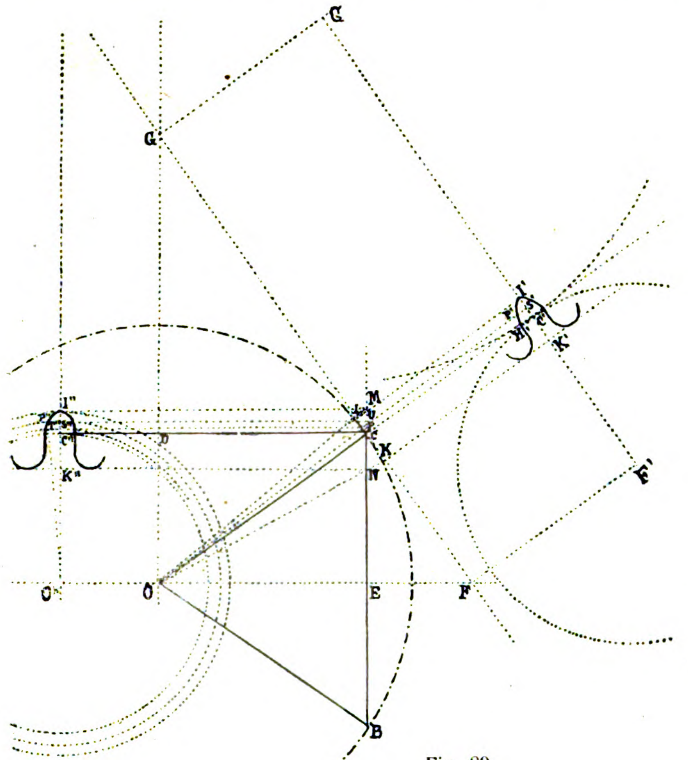


Fig. 89.

roue (pignon de remontoir, par exemple), dont nous pourrons placer le centre en O″, remarquons que le point C′ se projette en C et C″; nous aurons donc la circonférence de la base primitive du cône de rayon EC = O″C″ ; reportons la demi-épaisseur des dents C′H′ de chaque côté de C″ sur le cercle primitif.

Pour déterminer maintenant le rayon total O″I″ correspondant au point I′, projetons ce point I′ sur le plan FG, en I; menons le rayon OI prolongé jusqu'en M; le point d'intersection M de ce rayon avec le plan BC donne le rayon total EM que l'on peut projeter en O″I″ ; du centre O″, décrivons ensuite la circonférence totale de la roue.

On procède d'une manière analogue pour déterminer le fond des dents sur le plan BC, en projetant le point K′ sur FG, en menant le rayon OK qui coupe le plan BC en N et en projetant ce point en K″ ; on aura ainsi le rayon OK″ de la circonférence passant par le fond des dents.

Pour déterminer enfin un point quelconque P″ de la forme des dents, on projette le point P′ en P sur FG, on mène le rayon OPU et on projette les points PU sur O″I″. Du centre O″ on fait passer par les points obtenus des arcs de cercle et l'on reporte la demi-largeur S′P′ sur le cercle passant par S″ ; on trace ensuite le rayon O″T″. Le point P″, où ce rayon vient couper le cercle projeté de U, est le point de la dent.

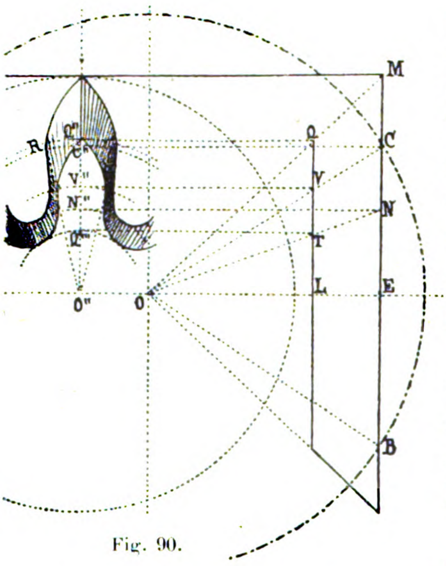


Fig. 90.

Recherchons encore la forme des dents qui se dessine sur le plan intérieur LQ parallèle au plan BCM (fig. 90).

Sur l'élévation latérale, le point Q représente la pointe des dents. Projetons ce point sur l'élévation de face, en Q″, et décrivons, de O″ comme centre, la circonférence qui passe par ce point et qui nous donne la pointe des dents. Pour obtenir le point T″ du fond des dents, traçons le rayon ON, coupant le plan LQ en T, et projetons ce point sur l'élévation de face ; nous obtiendrons ainsi le point T″ par lequel on fait passer la circonférence du fond des dents.

Pour obtenir encore des points quelconques, par exemple ceux qui se trouvent sur le cône primitif, on trace le rayon OC, coupant le plan LQ en V ; on projette ce point sur l'élévation de face, en V″, et l'on décrit la circonférence du

centre O″. On mène ensuite le rayon O″R ; les points déterminés par l'intersection de ce rayon avec la circonférence passant par V″ sont des points de la courbe des dents. On peut ainsi déterminer autant de points que l'on désire, et représenter de cette façon la forme complète de la dent.

Remarquons que, comparée à la forme déterminée des dents sur le plan FG (fig. 89), la forme obtenue sur l'élévation de face ayant O″ comme centre est allongée. On doit donc tenir compte, en pratique, de l'allongement de la figure de la dent de ces roues comparée avec celles d'engrenages plans correspondants.

Le tracé de l'élévation de face de la roue se fait d'une manière identique.

Défauts qui se présentent dans les engrenages.

329. Lorsque, dans un engrenage, la normale au point de contact ne passe pas par le point de tangence des circonférences primitives, la transmission de la force est irrégulière.

Les défauts de construction qui produisent le plus généralement cet effet, sont :

1° une disproportion relative des diamètres totaux des deux roues ;

2° un engrenage trop fort ou trop faible ;

3° une mauvaise denture.

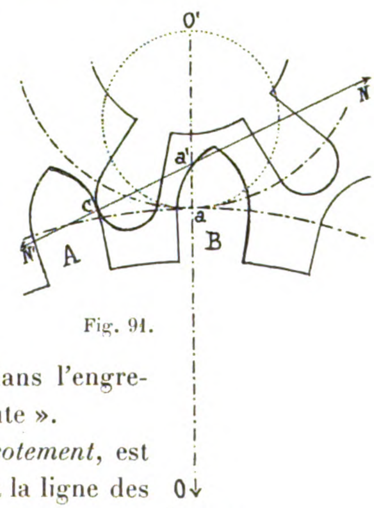


Fig. 91.

Suivant le cas, on constatera alors dans l'engrenage un « arcboutement » ou une « chute ».

330. L'*arcboutement*, aussi appelé *accotement*, est le contact irrégulier de deux dents avant la ligne des centres. Si, par exemple, a est le point de tangence de deux circonférences primitives O et O′ (fig. 91), et c le point de contact d'une dent et d'une aile, on constatera, en traçant la normale en ce point, qu'au lieu de passer par a elle coupera

la ligne des centres en un point a' situé entre a et O'. Il en résultera une diminution de la force transmise en cet instant pour les deux causes suivantes :

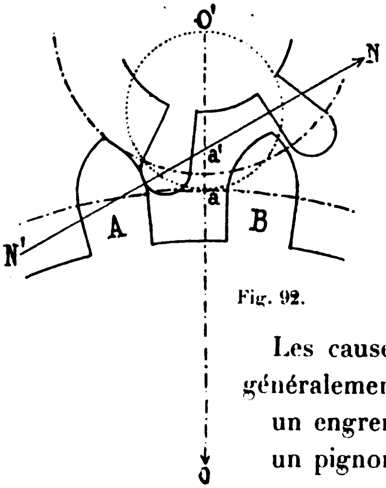


Fig. 92.

1° au lieu d'une force $F' = F \frac{O'a}{Oa}$ on n'aura plus que $F' = F \frac{O'a'}{Oa'}$, d'autant plus différente de la première que le point a' se trouvera plus rapproché du centre O' ;

2° augmentation du frottement rentrant.

Les causes qui peuvent produire ce défaut, sont généralement :

un engrenage trop faible ;

un pignon proportionnellement trop grand ;

une mauvaise denture.

La fig. 91 [1] montre le cas d'un pignon trop gros : le pas de l'engrenage est plus long que celui de la roue. La dent B a cessé de conduire l'aile et la dent A entre trop tôt en contact avec la suivante. Comme nous l'avons dit, le moment de la force transmise est alors diminué.

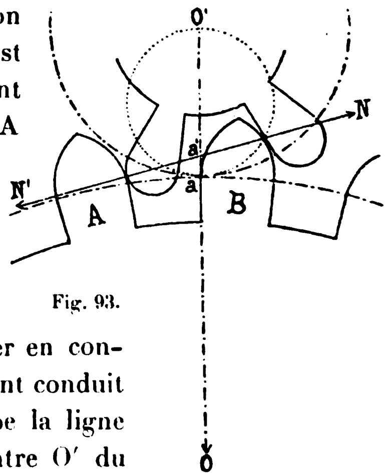


Fig. 93.

La fig. 92 montre le cas d'un engrenage trop faible : au lieu d'entrer en contact avec le flanc droit de l'aile, la dent conduit d'abord l'excédent ; la normale coupe la ligne des centres entre le point a et le centre O' du pignon.

Le fig. 93 montre le cas d'une mauvaise denture ; la dent,

[1] Dans les fig. 91, 92, 93, 95 et 96 les défauts qu'elles doivent représenter généralement ont été exagérés, afin de les faire mieux comprendre. On voit aussi que, par le fait d'un excédent d'aile demi-circulaire, de tels défauts sont souvent rendus plus sensibles pour les pignons de bas nombres ; ces excédents devraient être de forme demi-elliptique.

trop courte, par exemple, a son contact avec l'aile, comme dans le cas précédent : la normale passe entre le point *a* et le centre O′ et l'on a une diminution de la force transmise.

Lorsque les défauts ci-dessus ne sont pas trop accentués, il est possible d'y remédier, afin d'obtenir un engrenage passable ; mais, au moins dans le premier cas, il est impossible d'arriver à une perfection absolue.

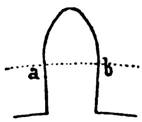


Fig. 94.

Si le pignon est légèrement trop gros, on peut retoucher la roue de façon à dégager la denture à la base *ab* (fig. 94) et la rendre moins pointue, à la façon de la denture anglaise.

Si l'engrenage est trop faible, on augmente le diamètre de la roue par un forgeage soigneux.

Si la denture est défectueuse, on peut essayer de la rectifier à l'aide d'une fraise ordinaire convenable ou, mieux encore, d'une fraise Ingold.

331. Si le premier contact de la dent avec l'aile commence après la ligne des centres, il peut arriver qu'à un certain instant du mouvement la vitesse angulaire de la roue devienne proportionnellement plus considérable que celle du pignon qu'elle conduit. Ce défaut est la *chute ;* il est produit par :

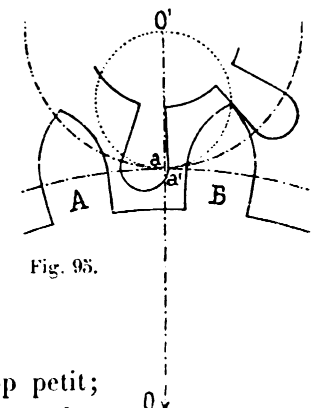


Fig. 95.

un engrenage trop fort ;

un pignon proportionnellement trop petit ;

une mauvaise denture.

La fig. 95 montre un pignon trop petit; le pas de l'engrenage de la roue est plus grand que celui du pignon. Lorsque la dent B devrait cesser le contact sur le cercle générateur, la dent A se trouve encore éloignée de l'aile qu'elle doit conduire. La dent B glissera le long du flanc de l'aile et en cet instant la normale au point de contact ne passera pas par le point de tangence des circonférences primitives, mais traversera la ligne des centres

en un point plus rapproché du centre de la roue. On aura donc ici augmentation de la force transmise. Pour un mouvement uniforme du pignon, la roue prendra un mouvement accéléré ; c'est, techniquement parlant, une « chute ».

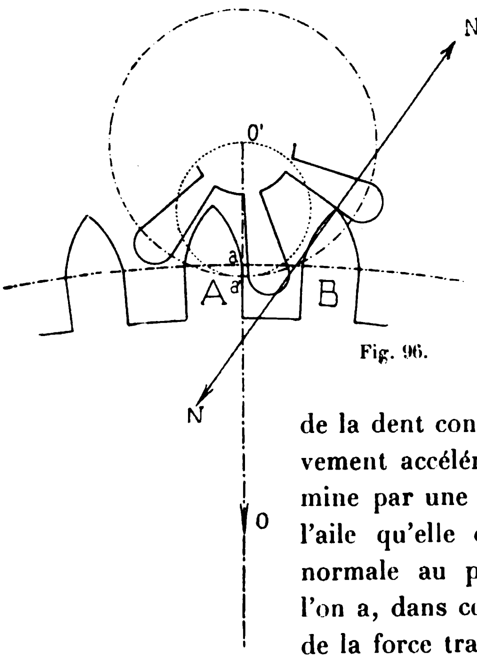


Fig. 96.

La fig. 96 représente un engrenage trop fort : la dent B conduit son aile plus loin que la circonférence génératrice ; il se produit alors un glissement de la pointe de la dent contre le flanc de l'aile ; le mouvement accéléré que prend la roue se termine par une chute de la dent suivante sur l'aile qu'elle conduira. La direction de la normale au point de contact montre que l'on a, dans ce cas aussi, une augmentation de la force transmise.

La fig. 97 représente le cas d'une mauvaise denture de la roue. Cette dent, trop allongée, conduit l'aile du pignon plus loin qu'elle ne le devrait géométriquement ; on peut reconnaître ainsi la chute qui se produira.

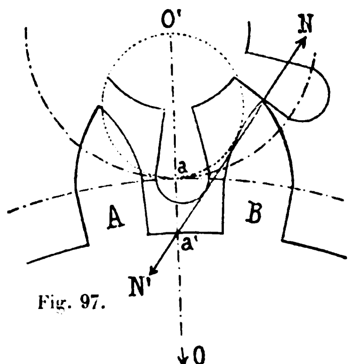


Fig. 97.

Il est possible de corriger un engrenage présentant les défauts ci-dessus en diminuant la hauteur de l'ogive de façon que les dents conduisent moins loin les ailes, ou autrement en formant les dents de manière à leur donner une plus grande largeur sur la circonférence primitive.

332. En constatant, comme nous venons de le faire, qne l'engrenage d'une roue dans un pignon trop gros produit un

arcboutement, que d'autre part un engrenage trop fort produit une chute, on voit qu'il est avantageux de renforcer un engrenage dont le pignon est trop gros.

Réciproquement, un engrenage dont le pignon est trop petit, devra être relativement faible.

333. Un défaut que l'on rencontre assez fréquemment dans les engrenages, est celui qui est occasionné par des pignons dont les ailes ne sont pas assez longues, c'est-à-dire des pignons qui ne sont pas assez profondément taillés. Si les dents de la roue sont correctes, on arrive très souvent à un contact de la pointe de la dent avec le fond des ailes (noyau du pignon). Si l'on ne peut changer de pignon, — ce qui est le seul moyen d'obtenir un engrenage parfait — il faut alors raccourcir l'ogive des dents, soit en leur enlevant la pointe, soit en modifiant la forme. On comprend que dans ces cas la perfection absolue n'existe plus, surtout si le nombre d'ailes du pignon est petit, donc lorsque le contact doit commencer avant la ligne des centres.

334. On rencontre assez souvent aussi des pignons de qualité ordinaire dont le flanc des ailes n'est pas dirigé vers le centre, mais s'en écarte plus ou moins ; de tels pignons doivent être autant que possible refusés si l'on veut conserver à l'engrenage la qualité d'engrenage à flanc. Sinon il faudrait former la dent de la roue au moyen d'une courbe décrite comme nous l'avons indiqué (223).

Dans un engrenage défectueux par suite de la forme ou de la direction des ailes du pignon, ou encore par celle des dents de la roue, si l'on vient à modifier l'un des deux profils, il peut se produire que l'on arrive à un engrenage correct, remplissant la condition d'une transmission uniforme de la force, lors même que les caractères essentiels de l'engrenage à flanc ou épicycloïdal n'existent plus. Dans ce cas, toute la théorie de la détermination des formes de contact est là pour nous faire comprendre que l'on a fort bien pu être conduit à un ensemble de formes remplissant la condition établie, c'est-à-dire que la normale aux points successifs de

contact passe constamment par le point de tangence des circonférences primitives. Nous savons que cette condition suffit pour que l'engrenage soit parfait, quelle que soit d'ailleurs la forme des profils établis.

Des résistances passives dans les engrenages.

335. **Notions générales.** — Nous avons déjà indiqué que les résistances passives sont des forces qui se présentent naturellement dans toutes les machines en mouvement (49).

Ces résistances sont de natures diverses : les unes dépendent des corps eux-mêmes, de leur poids, de leur forme, de leurs dimensions, comme aussi de la relativité des mouvements qui les animent : tels sont le frottement et ses congénères, l'inertie, les chocs ; les autres proviennent plutôt du milieu dans lequel ces corps se meuvent : telle est spécialement la résistance de l'air.

Parmi celles-ci, la cause capitale de l'absorption de travail dont il s'agit, est le *frottement*, dont nous entreprendrons d'abord l'étude générale avant d'en appliquer les lois au cas particulier des engrenages.

Du frottement.

336. Lorsqu'un corps se meut en glissant sur un autre corps, il se produit une résistance qui s'oppose au mouvement. Cette résistance est due à l'action des deux surfaces en contact, lorsque le mouvement déjà communiqué au corps permet de faire abstraction de l'inertie. Cette force résistante est le *frottement ;* elle paraît provenir de l'action réciproque des molécules des deux corps. Les aspérités plus ou moins évidentes de ces corps se pénètrent réciproquement, s'insinuent les unes entre les autres avec d'autant plus d'intensité que les deux surfaces sont plus fortement pressées l'une sur l'autre. En sus, lorsque l'un des corps se déplace, la résistance produite par cet « engrènement » s'augmente encore par le refoulement des molécules situées en avant du corps mobile.

337. Outre cette cause de résistance, il en existe une seconde, due à l'*adhérence* des deux surfaces. L'effet produit par cette deuxième cause peut être rendu très sensible en posant l'un sur l'autre deux plans de même nature; si les surfaces sont très exactement planes et parfaitement polies, comme, par exemple, celles de deux glaces, l'adhérence peut devenir si considérable que la séparation des deux corps devient très difficile [1].

Le frottement dépend donc des deux causes mentionnées, mais la dernière est assez souvent négligée si les deux surfaces sont directement en contact, c'est-à-dire s'il ne se trouve pas d'enduit ou corps lubrifiant, tel que l'huile, entre ces surfaces. De nombreuses expériences ont, en effet, prouvé que cette résistance est négligeable lorsque l'étendue des surfaces en contact n'est pas très considérable.

338. Mais, lorsqu'on interpose un corps gras entre les deux corps, il n'est plus possible de négliger cette dernière cause qui, dans certains cas, peut diminuer le frottement proprement dit et dans d'autres l'augmenter. Nous traiterons cette question plus loin et nous nous bornerons, pour le moment, à l'étude du « frottement à sec ».

339. **Des deux espèces de frottements.** — Si la même partie de la surface d'un des corps frottants reste toujours en contact avec l'autre corps, il y a glissement et le frottement prend le nom de *frottement de glissement*. Si, au contraire, les surfaces en contact changent à chaque instant, il y a roulement et le frottement prend le nom de *frottement de roulement*. Tel est dans le premier cas le frottement qui s'établit pendant le mouvement d'un traîneau le long d'une route et dans le second cas celui qui se produit lorsqu'une roue roule sur un plan.

Nous nous occuperons spécialement du frottement de glissement, le seul que nous rencontrions en horlogerie.

340. Le glissement peut être *linéaire*, c'est-à-dire s'effec-

[1] Ce phénomène provient de l'expulsion plus ou moins complète de l'air entre les surfaces et de la pression de l'atmosphère extérieure.

tuer le long d'un plan ou d'une surface quelconque, lorsqu'un des corps se déplace continuellement par rapport à l'autre; ou il peut être *circulaire*, si l'un des corps tourne sur lui-même sans progresser en avant, à l'exemple d'un tourillon dans ses coussinets.

Le frottement des dents d'un engrenage est produit par un glissement linéaire; celui des pivots de ces mêmes roues dans l'intérieur des trous où ils tournent, est produit par un glissement circulaire.

341. **Lois du frottement.** — On a reconnu par des expériences très précises que la résistance due au frottement est assujettie à trois lois principales, qui peuvent guider dans les applications et qui sont suffisamment exactes dans les limites entre lesquelles elles sont envisagées pour les machines.

1° *Le frottement est proportionnel à la pression normale*, c'est-à-dire que la résistance est toujours une même fraction de la pression qui applique un corps sur l'autre : ce qui se comprend assez bien, puisque les actions moléculaires doivent naître en raison de cette pression.

2° *Le frottement est indépendant des surfaces en contact*, c'est-à-dire que, quand cette étendue augmente sans que la pression change, la résistance totale reste la même, bien que la pression sur chaque élément de surface se trouve diminuée en raison inverse de l'étendue même de ces surfaces. Puisque, pour des substances données, le frottement est une fraction constante de la pression, il en résulte qu'un corps pesant traîné sur un plan donne toujours lieu à la même résistance, quelle que soit l'étendue de la surface de contact.

3° *Le frottement est indépendant de la vitesse du mouvement*, c'est-à-dire qu'il faudra une même quantité de travail pour faire parcourir à un corps une longueur déterminée en surmontant le frottement, quelle que soit la vitesse qui anime le corps.

A l'aide de ces trois lois fondamentales et des valeurs déterminées expérimentalement, pour établir le rapport du frottement à la pression, suivant la nature des surfaces en

contact, on peut évaluer, dans chaque cas, le travail absorbé par le frottement.

342. **Détermination expérimentale de la force du frottement.** — Supposons qu'un corps de poids P soit sollicité par une

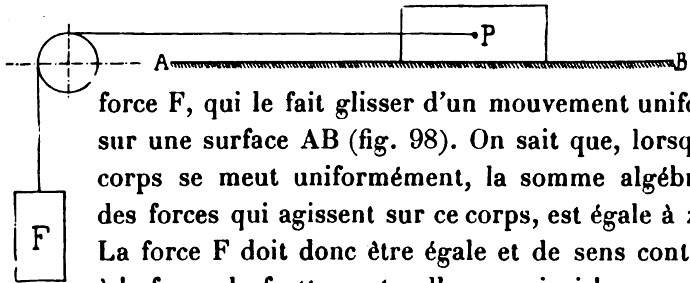


Fig. 98.

force F, qui le fait glisser d'un mouvement uniforme sur une surface AB (fig. 98). On sait que, lorsqu'un corps se meut uniformément, la somme algébrique des forces qui agissent sur ce corps, est égale à zéro. La force F doit donc être égale et de sens contraire à la force du frottement ; elle sera ainsi la mesure de la grandeur de cette résistance.

Une des lois que nous avons citées indiquant que le frottement est proportionnel à la pression, il en résulte que, si l'on double le poids P, on double en même temps le frottement et par suite son équivalent F.

Le rapport $\frac{F}{P}$ est donc constant pour les mêmes substances en contact ; on l'appelle le *coefficient de frottement*, que l'on représente généralement dans les calculs par la lettre f. On a ainsi

$$\frac{F}{P} = f.$$

Lorsque ce coefficient est connu, de même que la pression P exercée normalement aux surfaces en contact, on peut déterminer le frottement F en multipliant la pression P par le coefficient f. Donc

$$F = f\,P.$$

343. Remarquons que le coefficient de frottement ne conserve pas toujours la même valeur pour diverses surfaces de même nature, car plus un corps est dur et poli, moins le frottement est grand. On modifie aussi sa valeur en interposant un corps gras, de l'huile, par exemple, entre les surfaces en contact. Le but de cette dernière opération est principalement d'éviter le grippement et l'échauffement des corps

frottants. On sait en effet que, sans cette précaution, il se détache des surfaces de petits fragments qui les sillonnent de plus en plus profondément; le frottement augmente avec rapidité et l'échauffement qui en résulte, peut même aller jusqu'à faire rougir les corps et à les enflammer s'ils sont combustibles.

On constate que le frottement de l'acier sur l'acier produit par le grippement une poussière rougeâtre, qui est probablement de l'oxyde de fer; le frottement à sec de l'acier sur le laiton permet de constater qu'une certaine quantité de laiton se dépose à la surface de l'acier; l'échauffement doit, dans ces cas, être considérable.

Les horlogers connaissent les morsures, souvent très profondes, que produit le défaut d'huile aux pivots, lorsque ceux-ci tournent longtemps à sec dans leurs trous (le fait est surtout sensible aux pivots de la roue de centre); ils connaissent aussi l'usure profonde des ailes de pignons en acier trempé causée par les dents de roues en alliage d'or, qui, pour cette raison, sont presque totalement abandonnées de nos jours. On voit, par ces exemples, qu'une grande vitesse des mobiles n'est pas nécessaire pour produire le grippement, ce qui est en somme très conforme à la troisième loi du frottement.

344. Le tableau suivant est destiné à donner une idée de la valeur moyenne du coefficient f dans les conditions les plus habituelles. Il convient, dans chaque cas particulier, de choisir convenablement cette valeur d'après les conditions probables du fonctionnement des organes en mouvement.

Coefficients de frottement.

Corps en contact	Rapport f du frottement à la pression
Métaux sur métaux	0,15 à 0,17
Métaux sur pierres précieuses . . .	0,15
Bois sur bois	0,33
Briques et pierres sur les mêmes. .	0,65
Courroies sur poulies métalliques .	0,30 à 0,40

Dans les grandes machines dont les parties frottantes sont très soigneusement graissées, le coefficient de frottement diminue jusqu'à une valeur de $f = 0{,}08$.

345. **Travail du frottement.** — Le travail mécanique d'une force étant le produit de cette force par le chemin que parcourt son point d'application, lorsque le chemin et la force ont la même direction, on aura, si E est le chemin parcouru,

$$Tr.\ F = f P.\ E.$$

Si les deux corps sont mobiles, il y aura à considérer les deux forces de frottement qui ont pour valeur commune fP et qui agissent sur chaque corps en sens inverse de son mouvement relativement à l'autre, chacune d'elles produisant du travail.

Supposons que les mouvements des deux corps A et B (fig. 99) s'effectuent dans le sens des flèches (1), E et E′ étant les chemins respectivement parcourus dans cette direction, qui sera celle du mouvement relatif du corps A, si E est plus grand que E′.

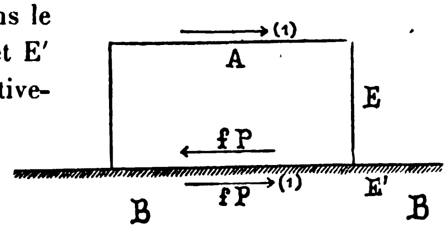


Fig. 99.

Si nous considérons le mouvement du corps A, le frottement produira un travail $fP.E$, qui sera négatif, puisque la direction fP est inverse de celle de E ; c'est donc un travail résistant. Au contraire, le travail de B sur A produira sur ce premier corps un travail positif $fP.E'$, qui se retranchera du travail résistant $fP.E$; de sorte qu'enfin le travail résistant produit par le frottement sera

$$Tr.\ F = fP.E - fP.E' = fP\,(E - E'),$$

$E - E'$ étant positif. Si $E - E'$ devient négatif, l'équation n'a plus lieu et il faudra changer le sens du frottement ; au lieu de $fP\,(E - E')$, on aura $fP\,(E' - E)$.

Remarquons ici que le travail développé par le frottement sur l'un des deux corps est positif ; relativement à ce corps,

le frottement joue donc le rôle de force motrice. Cette propriété est employée industriellement dans les transmissions de mouvement par cylindres, cônes ou plateaux de friction.

346. **Angle de frottement.** — Supposons un corps reposant sur un plan incliné AC (fig. 100); admettons que nous ayons réglé l'inclinaison de ce plan de telle façon que le corps soit sur le point de se mouvoir ou, ce qui revient au même, qu'il se meuve d'un mouvement uniforme le long de ce plan. Dans ce cas, la force du frottement est égale et de sens contraire à la force qui agit pour le faire descendre.

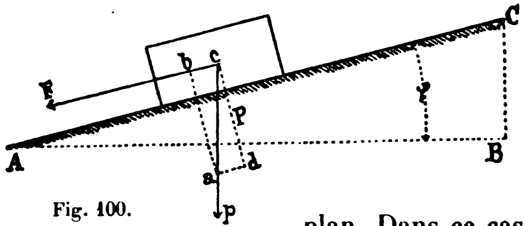


Fig. 100.

Le poids p du corps agit suivant une ligne verticale ca passant par son centre de gravité; faisant $ca = p$, menant la droite cb parallèle au plan et cd perpendiculaire à cette direction, on pourra former le parallélogramme des forces en traçant les droites ad parallèle à bc et ab parallèle à cd. La longueur cb représentera alors la valeur de la force F tendant à faire descendre le corps le long du plan, et la longueur cd la pression normale P. Nous aurons donc

$$\frac{bc}{ba} = \frac{F}{P}.$$

Les triangles semblables bca et BCA donnent en outre la proportion

$$\frac{bc}{ba} = \frac{BC}{BA} = \frac{F}{P} = f.$$

On peut voir ainsi que le coefficient de frottement est égal au quotient de la division de la hauteur BC du plan incliné par la longueur de la base AB.

347. En désignant par φ l'angle CAB que forme le plan incliné avec l'horizon, quand le mouvement a lieu, les deux

composantes de la pesanteur p peuvent être aussi représentées par

$$p.\ \sin\varphi = F$$

suivant la direction du plan incliné et par

$$p.\ \cos\varphi = P$$

perpendiculairement à ce plan. On a donc

$$\frac{F}{P} = \frac{p.\ \sin\varphi}{p.\ \cos\varphi} = \text{tang}\ \varphi = f.$$

On reconnaît, en faisant varier arbitrairement l'étendue de la surface en contact et le poids du corps, que l'angle d'inclinaison ne varie pas pour les mêmes substances en contact.

Cet angle s'appelle l'*angle du frottement* et la valeur numérique du rapport du frottement à la pression, égal à tang φ, est le coefficient du frottement. Pour les métaux durs et polis et les pierres employées en horlogerie, cet angle a une valeur variant de 7° à 8°30′.

Exemple d'application. — Sur une plaque d'acier trempé et poli, nous plaçons un rubis, une levée d'ancre, par exemple. Nous élevons peu à peu l'une des extrémités de la plaque jusqu'à ce que le rubis commence à glisser d'un mouvement uniforme. La hauteur BC jusqu'à laquelle il a fallu élever la plaque d'acier, étant de 13,4 mm. et la longueur de la base AC de 89 mm., le coefficient du frottement du rubis sur l'acier devra être

$$f = \frac{13{,}4}{89} = 0{,}15.$$

L'angle de frottement sera dans ce cas

$$\text{tang}\ \varphi = 0{,}15$$
$$\text{et}\ \varphi = 8°32',$$

valeur que nous adopterons dans nos calculs.

Calcul du frottement dans les engrenages.

348. Connaissant la pression normale entre les dents d'un engrenage, on a la valeur du frottement de glissement (342). De sorte que, si l'on connaissait la longueur de l'espace parcouru par le frottement d'une dent sur l'autre, on aurait le travail absorbé par ce frottement (345).

Avant d'entrer dans les détails de ce calcul, rappelons-nous la question cinématique de la transmission du mouvement.

Nous avons trouvé qu'au moyen des engrenages le mouvement d'une roue se transmet uniformément à l'autre ; cette démonstration géométrique est indépendante de la matière dont sont formées les roues, de la nature des frottements, etc. Cette propriété a lieu quels que soient les frottements en jeu et la grandeur des efforts qui se manifestent. Les résistances passives n'ont donc aucun effet sur la transmission du mouvement proprement dit ; elles ne font qu'augmenter le travail à dépenser pour produire le mouvement de la roue motrice.

On comprend ainsi que le travail du frottement soit généralement exprimé en fonction du travail résistant utile auquel il s'ajoute.

349. Adoptons les notations suivantes :

A la roue qui commande le mouvement ;

r son rayon primitif ;

n son nombre de dents ;

A′ la roue commandée ;

r' son rayon primitif ;

n' son nombre de dents ;

$a = tc = tc'$ (fig. 101) le pas de l'engrenage, et Q la résistance s'opposant au mouvement de A′ en agissant tangentiellement à la circonférence primitive.

Le plus ordinairement, dans les engrenages, il y a plusieurs dents de la roue qui travaillent à la fois ; mais, afin de faci-

liter les calculs, nous supposerons qu'il n'y en ait qu'une et qu'elle commande de t en c, c'est-à-dire sur un espace égal au pas. Pendant ce parcours a, le travail absorbé par la pression normale entre les dents est égal à cette pression multipliée par la longueur de la courbe que parcourt le point de contact t dans son passage de t en t', longueur qui ne diffère pas sensiblement de a[1]. Or, puisque le point de contact s'éloigne très peu de l'arc tc', on peut supposer, sans commettre d'erreur sensible, que la pression est égale à la force Q agissant tangentiellement à tc' et le travail absorbé est alors

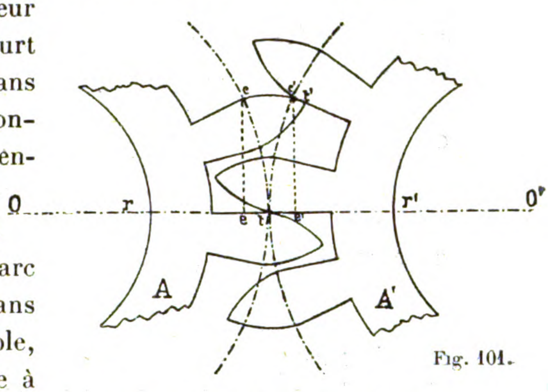


Fig. 101.

$$aQ.$$

De l'hypothèse que la pression normale entre les dents est constamment égale à Q (valeur moyenne de cette pression), il résulte que le frottement est égal à

$$fQ.$$

Quant au travail absorbé par ce frottement, on remarque que, pendant que le point de contact t passe en t', l'espace parcouru par ce point sur la dent qui commande, est égal à $t'c$ et que celui qu'il a parcouru sur la dent commandée, est $t'c'$, d'où il résulte qu'il y a eu glissement sur une longueur égale à

$$t'c - t'c',$$

[1] Remarquons que la pression normale n'a pas, en général, une valeur constante ; elle ne l'aurait que dans le cas de l'engrenage à développantes de cercle, si l'on négligeait le frottement. Pour les autres, elle est variable et c'est la valeur moyenne de cette quantité qu'il faut faire entrer dans l'expression du travail du frottement.

différence que l'on peut supposer égale à une droite joignant c à c'. Le travail absorbé par le frottement est donc

$$Qf \times cc'.$$

Abaissant les perpendiculaires ce et $c'e'$ à la ligne des centres, OO' étant à peu près parallèle à cc', on peut supposer

$$cc' = ee' = te + te' ;$$

or, on a

$$te = \frac{\overline{ct}^2}{2r} \text{ et } te' = \frac{\overline{ct}^2}{2r'} ;$$ [1]

et, comme on peut admettre

$$ct = c't = a,$$

ce qui se rapproche d'autant plus de la vérité que le pas est plus petit par rapport au rayon, on a donc

$$te = \frac{a^2}{2r} \quad \text{et} \quad te' = \frac{a^2}{2r'};$$

par suite, le travail absorbé par le frottement est

$$Qf\left(\frac{a^2}{2r} + \frac{a^2}{2r'}\right) = Q\frac{fa^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Le travail que la roue A doit transmettre à la roue A' pour le chemin parcouru a, est donc

$$\text{T}r_{\text{m}} = Qa + Qa\,\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right). \qquad (1)$$

Si P est la force motrice qui sollicite tangentiellement la roue qui conduit, le travail moteur pour le parcours a est Pa et l'on a

$$Pa = Qa + Qa\,\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

d'où

$$P = Q + Q\,\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

[1] Une corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre et sa projection sur ce diamètre.

350. Reprenant la formule (1) dans laquelle Qa représente le travail utile « Tr_u », celle-ci peut encore se mettre sous la forme

$$Tr_m = Tr_u + Tr_u.\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right). \qquad (2)$$

Comme on a en outre

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

n et n' étant les nombres de dents, et que

$$na = 2\pi r \text{ et } n'a = 2\pi r',$$

on obtient

$$r = \frac{na}{2\pi} \quad \text{et} \quad r' = \frac{n'a}{2\pi}.$$

En remplaçant ces valeurs dans la formule (2) et simplifiant, il vient

$$Tr_m = Tr_u + Tr_u.f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right), \qquad (3)$$

ou

$$Tr_m = Tr_u\left[1 + f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\right],$$

d'où l'on tire

$$Tr_u = \frac{Tr_m}{1 + f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)}. \qquad (4)$$

351. En examinant ces deux dernières équations, on peut voir que l'on diminue le frottement en augmentant le nombre des dents.

Ainsi, pour une roue de 64 dents engrenant dans un pignon de 8 ailes, on aurait, en admettant $Tr_m = 1$ et $f = 0,15$,

$$Tr_u = \frac{1}{1 + 0,15.\,3,1416\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{1,066},$$

tandis que, pour une roue de 96 dents engrenant dans un pignon de 12 ailes, on n'aurait plus que

$$Tr_u = \frac{1}{1 + 0,15.\,3,1416\left(\frac{1}{96} + \frac{1}{12}\right)} = \frac{1}{1,044}.$$

On reconnaît ainsi la règle pratique qu'il faut multiplier autant que possible le nombre des dents pour diminuer le travail du frottement afin d'avoir moins d'usure et des mouvements plus doux.

352. Pour les *engrenages intérieurs*, les formules (3) et (4) deviennent

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{m}} = \mathrm{T}r_{\mathrm{u}} + \mathrm{T}r_{\mathrm{u}} f\pi \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) \tag{5}$$

et

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{T}r_{\mathrm{m}}}{1 + f\pi \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)}. \tag{6}$$

On voit que dans ces engrenages, à nombre de dents égal, le frottement est moindre que dans les engrenages extérieurs.

353. Le frottement dans la *crémaillère* peut se déduire aussi des formules précédentes, en remarquant que, le rayon d'une des circonférences primitives devenant infini, l'expression générale du frottement, pour $n = \infty$, devient

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{m}} = \mathrm{T}r_{\mathrm{u}} + \mathrm{T}r_{\mathrm{u}} f\pi . \frac{1}{n'} \tag{7}$$

et

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{T}r_{\mathrm{m}}}{1 + f\pi \frac{1}{n'}}. \tag{8}$$

354. Pour les *engrenages coniques*, en conservant les mêmes notations qu'aux cas précédents, on arriverait aux résultats suivants, α étant l'angle que forment entre eux les axes des deux roues :

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{m}} = \mathrm{T}r_{\mathrm{u}} + \mathrm{T}r_{\mathrm{u}} \frac{fa}{2} \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{2 \cos \alpha}{r\, r'}} \tag{9}$$

et

$$\mathrm{T}r_{\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{T}r_{\mathrm{m}}}{1 + f\pi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2 \cos \alpha}{n\, n'}}}. \tag{10}$$

Ces engrenages sont plus doux que les engrenages cylindriques d'un même nombre de dents.

355. **Frottement avant et après la ligne des centres.** — Dans les formules que nous avons établies, l'influence du frottement est la même avant qu'après la ligne des centres ; ce résultat n'est pas d'accord avec ceux de l'expérience, qui montre au contraire que le frottement avant la ligne des centres est plus nuisible que celui qui s'exerce après le passage de cette ligne. Cependant, puisque nous avons supposé le pas très petit, nos résultats peuvent être considérés, dans ce cas, comme suffisamment exacts.

Il est certain qu'il n'en serait plus de même si le contact commençait à une distance relativement grande de la ligne des centres.

356. Envisageons, par exemple, le cas d'une roue de 60 dents engrenant dans un pignon de 6 ailes, puisque nous savons qu'en horlogerie cet engrenage est un de ceux pour lesquels le contact de la dent et de l'aile doit commencer le plus en avant de la ligne des centres, et examinons successivement les quatre cas suivants :

1° la roue conduit le pignon après la ligne des centres ;
2° le pignon conduit la roue avant la ligne des centres ;
3° la roue conduit le pignon avant la ligne des centres ;
4° le pignon conduit la roue après la ligne des centres.

357. **La roue conduit le pignon après la ligne des centres.** — Soient O et O′ les centres des deux mobiles (fig. 102), P le moment de la force par rapport à l'axe de la roue qui conduit, et Q le moment de la force par rapport à l'axe de la roue qui est menée.

La roue O est en équilibre sous l'action de la force P, dont le moment est P, de la force normale $N' = N$, dont le moment est $-$ N.Ob, et de la force du frottement fN, dirigée perpendiculairement à la force normale et dont le moment est $-f$N. Od. On a donc

$$P - N.Ob - fN.Od = 0.$$

D'autre part, la roue O′ est en équilibre sous l'action de la force Q, dont le moment est Q, et de la réaction normale

$N' = N$, dont le moment est $- N'.O'b'$. Le moment de la force du frottement est nul, puisque son bras de levier est égal à zéro. On a donc

$$Q - N'.O'b' = 0.$$

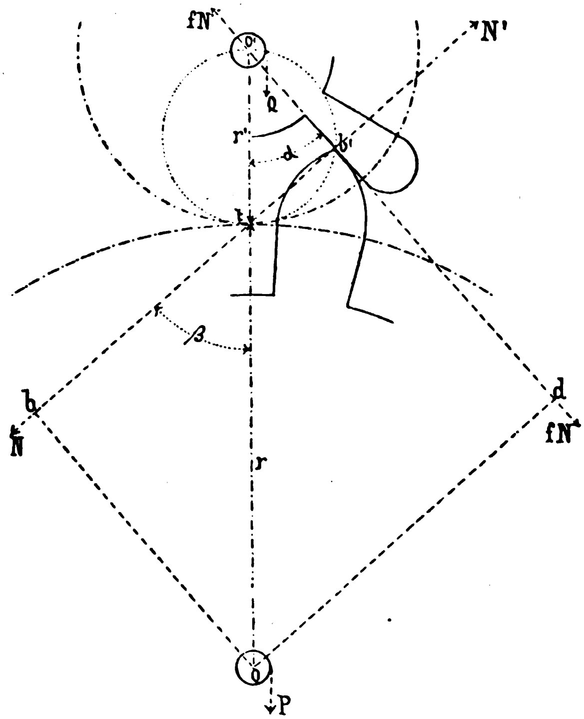


Fig. 102.

En divisant la première de ces égalités par la seconde et simplifiant, on obtient

$$\frac{P}{Q} = \frac{Ob + f.\ Od}{O'b'}.$$

Mais, en désignant par β l'angle $btO = b'tO'$ formé par la normale et la ligne des centres, on aura aussi

$$\frac{P}{Q} = \frac{r.\sin\beta + f(r + r')\cos\beta}{r'.\sin\beta},$$

et, en divisant par $\sin\beta$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r'}\left(1 + f\frac{r + r'}{r}\,\text{cotang.}\,\beta\right),$$

ou encore

$$\frac{Pr'}{Qr} = 1 + f\left(1 + \frac{n'}{n}\right)\,\text{cot.}\,\beta. \qquad (1)$$

Remarquons que si dans cette équation nous faisions le frottement égal à zéro, nous aurions

$$\frac{Pr'}{Qr} = 1$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r'},$$

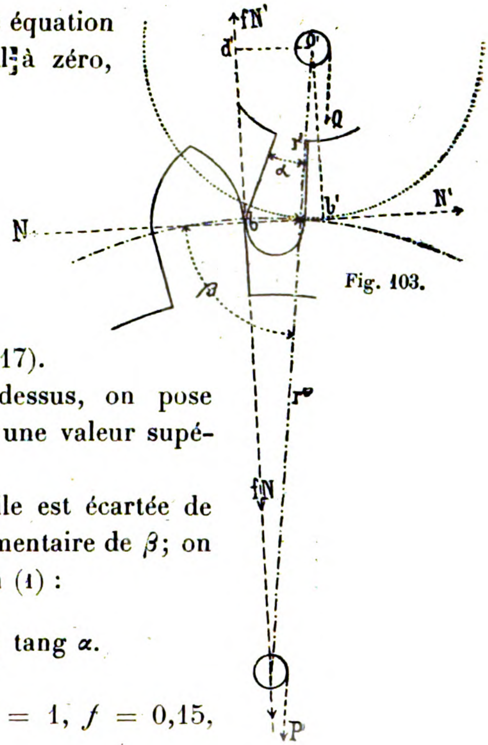


Fig. 103.

formule analogue à celle que nous avons établie (202, équat. 17).

Si, dans la formule (1) ci-dessus, on pose $Qr = 1$, on obtiendra pour Fr' une valeur supérieure à l'unité..

L'angle α (fig. 102), dont l'aile est écartée de la ligne des centres, est complémentaire de β; on peut donc aussi écrire l'équation (1) :

$$\frac{Pr'}{Qr} = 1 + f\left(1 + \frac{n'}{n}\right)\,\text{tang}\,\alpha.$$

Calcul numérique. — Soit $Qr = 1$, $f = 0{,}15$, $\frac{n'}{n} = \frac{6}{60}$,

$$\alpha = 42^\circ\,15'\,47'',$$

on a

$$f\left(1 + \frac{n'}{n}\right) = 0{,}15\left(1 + \frac{6}{60}\right) = 0{,}165,$$

$$\begin{aligned} \log : 0{,}165 &= 0{,}2174839 - 1 \\ \log : \text{tang.}\,\alpha &= 9{,}9584454 \\ \hline &\ 0{,}1759293 - 1. \\ \text{Nombre.}\ . &= 0{,}14994. \end{aligned}$$

Nous aurons donc le rapport

$$\frac{Pr'}{Qr} = 1{,}14994.$$

En faisant abstraction du frottement et admettant le moment P = 1 gr., nous aurions dans ce cas

$$\frac{P}{Q} = \frac{60}{6}, \text{ d'où } Q = 1.\ \frac{6}{60} = 0{,}1 \text{ gr.}$$

En introduisant la force du frottement, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{1{,}14994 \times 60}{6},$$

d'où

$$Q = \frac{1}{11{,}4994} = 0{,}08696 \text{ gr.}$$

358. **Le pignon conduit la roue avant la ligne des centres.** — Dans ce cas, le moment Q devient moteur et la valeur Qr sera supérieure à Fr'. La formule (1) devient alors

$$\frac{Qr}{Pr'} = \frac{1}{1 - f\left(1 + \frac{n'}{n}\right) \operatorname{tang} \alpha}, \qquad (2)$$

en remarquant que le signe du frottement est changé.

Calcul numérique. — Mêmes données que dans le cas précédent, sauf que nous prenons ici $Pr = 1$. Nous avons

$$f\left(1 + \frac{n'}{n}\right) \operatorname{tang}: \alpha = 0{,}14994,$$

$$1 - f\left(1 + \frac{n'}{n}\right) \operatorname{tang}: \alpha = 0{,}85006,$$

puis

$$\frac{Qr}{Pr'} = \frac{1}{0{,}85006} = 1{,}1764.$$

En faisant abstraction du frottement, on aurait, si Q = 1 gr.,

$$\frac{Q}{P} = \frac{6}{60}, \text{ d'où } P = Q\,\frac{60}{6} = 10 \text{ gr.}$$

En introduisant la force du frottement, on aura

$$\frac{Q}{P} = 1{,}1764.\ \frac{6}{60},$$

d'où

$$P = \frac{1}{0{,}11764} = 8{,}5 \text{ gr.}$$

359. **La roue conduit le pignon avant la ligne des centres.** — Nous avons dans ce cas (fig. 103), en raisonnant de même que précédemment,

$$P - N.Ob = 0,$$

$$Q - N'.O'b' + fN'.O'd' = 0,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{r.\sin\beta}{r'.\sin\beta - f(r + r')\cos\beta},$$

ou encore

$$\frac{Pr'}{Qr} = \frac{1}{1 - f\left(1 + \frac{n}{n'}\right)\text{cotang}:\beta}.$$

Mais l'angle bOO', complémentaire de β, est égal à

$$\alpha\frac{n'}{n}$$

puisque les angles parcourus, dans le même temps, par les deux mobiles d'un engrenage sont inversement proportionnels aux nombres de dents (182).

On aura donc

$$\frac{Pr'}{Qr} = \frac{1}{1 - f\left(1 + \frac{n}{n'}\right)\text{tang}\left(\alpha\frac{n'}{n}\right)}. \qquad (3)$$

Calcul numérique. — Soit $\alpha = 17°44'13''$, $n = 60$, $n' = 6$. On a

$$\alpha\frac{n'}{n} = 0{,}1 \times 17°\,44'\,13'' = 1°\,16'\,25'',3,$$

$$f\left(\frac{n}{n'} + 1\right) = 0{,}15 \times 11 = 1{,}65,$$

$$\log: 1{,}65 = 0{,}2174839,$$

$$\log:\text{tang}:\left(\alpha\frac{n}{n'}\right) = \underline{8{,}4908948,}$$

$$0{,}7083787 - 2.$$

$$\text{Nombre} = 0{,}051095,$$

$$1 - f\left(1 + \frac{n}{n'}\right)\text{tang}:\left(\alpha\frac{n'}{n}\right) = 1 - 0{,}051095 = 0{,}948905$$

et

$$\frac{1}{0{,}948905} = 1{,}05384 = \frac{Pr'}{Qr}.$$

Si le moment de force P = 1 gr., nous avons, sans le frottement,

$$Q = P\,\frac{n'}{n} = 1 . \frac{6}{60} = 0{,}1 \text{ gr.}$$

En introduisant le frottement, on a

$$Q = \frac{P}{1{,}05384}.\frac{n'}{n} = \frac{1}{1{,}05384}.\frac{1}{10},$$

d'où

$$Q = 0{,}09489 \text{ gr.}$$

360. **Le pignon fait tourner la roue après la ligne des centres.** — Le moment Q devient moteur et la formule (3) devient

$$\frac{Qr}{Pr'} = 1 + f\left(1 + \frac{n}{n'}\right) \operatorname{tang}\left(\alpha\,\frac{n'}{n}\right) \qquad (4)$$

en changeant le signe du frottement.

Calcul numérique. — On a, d'après le calcul précédent,

$$\frac{Qr}{Pr'} = 1 + 0{,}051095 = 1{,}051095.$$

Sans le frottement, nous avions

$$\frac{Q}{P} = \frac{n'}{n}, \text{ d'où } P = Q\,\frac{n}{n'},$$

et, si Q = 1 gr.,

$$P = \frac{60}{6} = 10 \text{ gr.}$$

Avec le frottement on aura

$$P = \frac{60}{6}.\frac{1}{1{,}051095} = \frac{10}{1{,}051095}$$

et

$$P = 9{,}514 \text{ gr.}$$

361. **Résumé des calculs précédents.** — Le moment de la force motrice agissant sur la roue étant égal à 1 gramme, le

moment de la force résistante par rapport à l'axe du pignon doit être :

à l'instant du premier contact avant la ligne des centres,

$$Q = 0,09489 \text{ gr.},$$

et, à l'instant du dernier contact après la ligne des centres,

$$Q = 0,08696 \text{ gr.}$$

Lorsque le pignon conduit la roue, nous avons trouvé, à l'instant du premier contact avant la ligne des centres,

$$P = 8,5 \text{ gr.},$$

et, à l'instant du dernier contact après la ligne des centres,

$$P = 9,514 \text{ gr.}$$

On voit que, dans le cas le plus ordinaire, lorsque la roue conduit le pignon, la force absorbée par le frottement avant la ligne des centres est fort peu différente de celle qui est absorbée après le passage de cette ligne : ce que nous avons admis se trouve ainsi confirmé (270) [1].

On voit aussi que plus la roue qui conduit, devient petite par rapport à celle qui est conduite, plus aussi augmente la différence de résistance avant et après la ligne des centres ; il convient alors d'augmenter autant que possible le nombre de dents des deux mobiles.

Calculs du frottement des pivots.

362. Lorsque la montre se trouve placée dans une position horizontale, les différents mobiles du rouage reposent sur

[1] Pour pouvoir être comparés entre eux d'une manière absolue, il faudrait que les chiffres ci-dessus fussent calculés pour des angles d'approche et de retraite égaux entre eux. C'est ce qui explique pourquoi, lorsque la roue conduit le pignon, le moment de la force absorbée par le frottement avant la ligne des centres est inférieur à celui que nous avons obtenu pour l'instant du dernier contact. Si l'on calculait, pour le cas ci-dessus, le moment de la force Q pour un angle de retraite de 17° 44′ 13″, on trouverait

$$Q = 0,09498 \text{ gr.},$$

chiffre à peine supérieur à celui que nous avons obtenu pour le même angle avant la ligne des centres.

les « portées » plates de leur pivot inférieur ; dans les positions verticales, ces mêmes mobiles reposent sur les surfaces cylindriques des deux pivots. La force du frottement est proportionnelle à la pression que subissent les surfaces en contact. Dans les positions horizontales, la pression provient du poids du mobile et de la force latérale qui appuie les pivots contre les parois des trous ; dans les positions verticales, ces mêmes forces sont en action, mais, par suite de la position de l'engrenage sur les axes, ces pressions seront généralement différentes d'un pivot à l'autre.

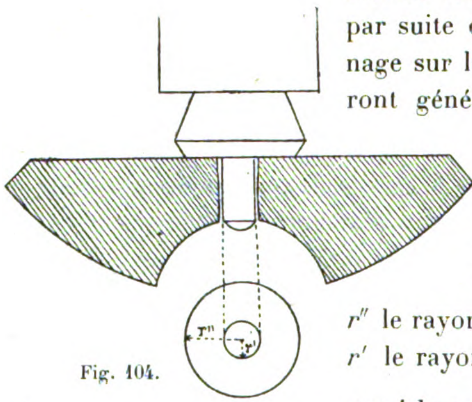


Fig. 104.

363. **Travail absorbé par le frottement de la surface plane de la portée d'un pivot.** — Soient (fig. 104) r'' le rayon extérieur de la portée et r' le rayon du pivot. Représentons aussi le rayon moyen $\frac{r''+r'}{2}$ par ρ et par l la largeur de la portée, donc

$$l = r'' - r'.$$

On aura par suite

$$r'' = \rho + \frac{l}{2} \text{ et } r' = \rho - \frac{l}{2}.$$

La surface de la couronne circulaire de rayon $r'' - r'$ étant

$$\pi\,(r''^2 - r'^2),$$

on aura

$$\pi\,(r''^2 - r'^2) = \pi\left[\left(\rho + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(\rho - \frac{l}{2}\right)^2\right] = 2\,\pi\rho l.$$

La surface du cercle de rayon r' sera

$$\pi r'^2 = \pi\left(\rho - \frac{l}{2}\right)^2 = \pi\left(\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho\, l\right).$$

P étant la pression exercée sur la couronne et en admettant que cette pression varie proportionnellement à l'étendue

de la surface, celle qui s'exercerait sur un cercle de rayon r' devrait être

$$\frac{P}{2\rho l}\left(\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho l\right),$$

et celle qui aurait lieu sur le cercle de rayon r'', serait

$$P + \frac{P}{2\rho l}\left(\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho l\right).$$

Le travail absorbé par le frottement de la couronne est égal au travail absorbé par le frottement qui se produirait sur la surface totale du cercle de rayon $r'' = \rho + \frac{l}{2}$ diminué de celui qui aurait lieu sur la surface du cercle de rayon $r' = \rho - \frac{l}{2}$; il est donc[1] :

$$Tr = {}^4/_3\pi f\left[P\left(\rho+\frac{l}{2}\right)+P\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}-\rho l}{2\rho l}\left(\rho+\frac{l}{2}\right)-P\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}-\rho l}{2\rho l}\left(\rho-\frac{l}{2}\right)\right]$$

ou

$$Tr = {}^4/_3\pi f P\left\{\rho+\frac{l}{2}+\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}-\rho l}{2\rho l}\left[\left(\rho+\frac{l}{2}\right)-\left(\rho-\frac{l}{2}\right)\right]\right\};$$

mais comme

$$\left(\rho + \frac{l}{2}\right) - \left(\rho - \frac{l}{2}\right) = l,$$

[1] Pour une pression P, la force développée par le frottement est fP ; le travail de cette force est le produit de fP par le chemin parcouru. Ce chemin n'est pas le même pour tous les points de la surface ; nul au centre, il atteint son maximum à la circonférence extérieure. Pour obtenir sa valeur moyenne, divisons le cercle de rayon r en un nombre n de secteurs égaux et suffisamment petits pour que chacun d'eux puisse être envisagé comme un triangle. La résultante des pressions élémentaires supportées par chacun de ces triangles doit passer par son centre de gravité, soit au $^2/_3$ du rayon. La force du frottement étant pour l'un d'eux $f\frac{P}{n}$, le travail de cette force sera pour un tour

$$f\frac{P}{n}\cdot 2\pi\frac{2}{3}r = f\frac{P}{n}\cdot\frac{4}{3}\pi r,$$

et, pour la somme des n secteurs, le travail sera

$$Tr = \frac{4}{3}fP\pi r.$$

on a

$$Tr = {}^4/_3\, \pi f P \left(\rho + \frac{l}{2} + \frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho l}{2\,\rho}\right).$$

Mais

$$\frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho l}{2\,\rho} = \frac{\rho}{2} + \frac{l^2}{8\,\rho} - \frac{l}{2},$$

nous aurons encore

$$Tr = {}^4/_3\, \pi f P \left(\frac{3}{2}\rho + \frac{l^2}{8\,\rho}\right) = 2\,\pi f P \left(\rho + \frac{1}{12}\frac{l^2}{\rho}\right).$$

364. Dans la position horizontale, la pression P provient du poids du mobile; cette pression est toujours bien inférieure à la pression latérale avec laquelle les pivots sont pressés contre les parois des trous. Ainsi, dans l'équation précédente, on peut négliger le terme

$$\frac{1}{12}\frac{l^2}{\rho}$$

et l'on a simplement

$$Tr = fP.\,2\,\pi\rho = fP\pi\,(r'' + r').$$

365. Dans la position verticale de la montre, la pression P sur la portée du pivot est nulle; on peut donc aussi admettre que le frottement soit nul.

Le travail du frottement de la surface cylindrique des pivots contre les parois des trous est exprimé par

$$Tr = fP.\ 2\,\pi r',$$

r' étant le rayon du pivot. La formule comprend le travail absorbé aux deux pivots, puisque P est la pression totale et que le frottement ne dépend que de cette pression et non de l'étendue de la surface en contact.

366. **Détermination de la pression latérale reçue par les pivots des mobiles du rouage.** — Envisageons, par exemple, la roue moyenne d'une montre. Ce mobile reçoit, d'un côté, une action de la part de la roue de centre engrenant dans son pignon et, de l'autre, une résistance provenant du pignon

de secondes dans lequel engrène la roue moyenne. Ces deux efforts se traduisent par une pression sur l'axe et les deux pivots sont poussés contre les parois des trous; pour chacun d'eux, la charge qu'ils reçoivent peut être représentée, en grandeur et en direction, par la résultante des forces partielles que reçoit l'axe de la roue à chacune de ses extrémités. Cette pression dépend du rapport de la distance des pivots au point d'application des forces en jeu, à la longueur de l'axe.

367. Imaginons le point de contact des dents et des ailes sur la ligne des centres et représentons par P la force que reçoit l'aile du pignon de la part de la dent de la roue de centre; puisque simultanément une dent de la roue moyenne s'appuie contre une aile du pignon de secondes, la force P fait naître la réaction P′. La direction des forces P et P′ est perpendiculaire à la ligne des centres.

Appelons r et r' les rayons primitifs de la roue et du pignon ; nous aurons pour l'état d'équilibre

$$\mathrm{P}r' = \mathrm{P}'r \quad \text{et} \quad \mathrm{P}' = \mathrm{P}\,\frac{r'}{r}.$$

L'équilibre ne sera pas rompu lorsqu'on appliquera, au point diamétralement opposé à celui du contact de la dent et de l'aile, une force P_1 égale et de sens contraire à P, et de même, au point opposé au point d'application de P′, une force P'_1 égale et de sens contraire à celle-ci.

La résultante des forces P et P_1 est 2P; elle doit être appliquée à l'axe du pignon, parallèlement aux composantes (fig. 105).

Le pivot supérieur de la roue moyenne recevra de la part de la résultante 2 P une force p et le pivot inférieur une force q, de telle façon que l'on ait

$$2\mathrm{P} = p + q.$$

On doit avoir

$$pa = qb\,;$$

a représente la distance de la portée du pivot supérieur au

milieu de l'épaisseur de la roue de centre et b la distance de ce dernier point à la portée du pivot inférieur.

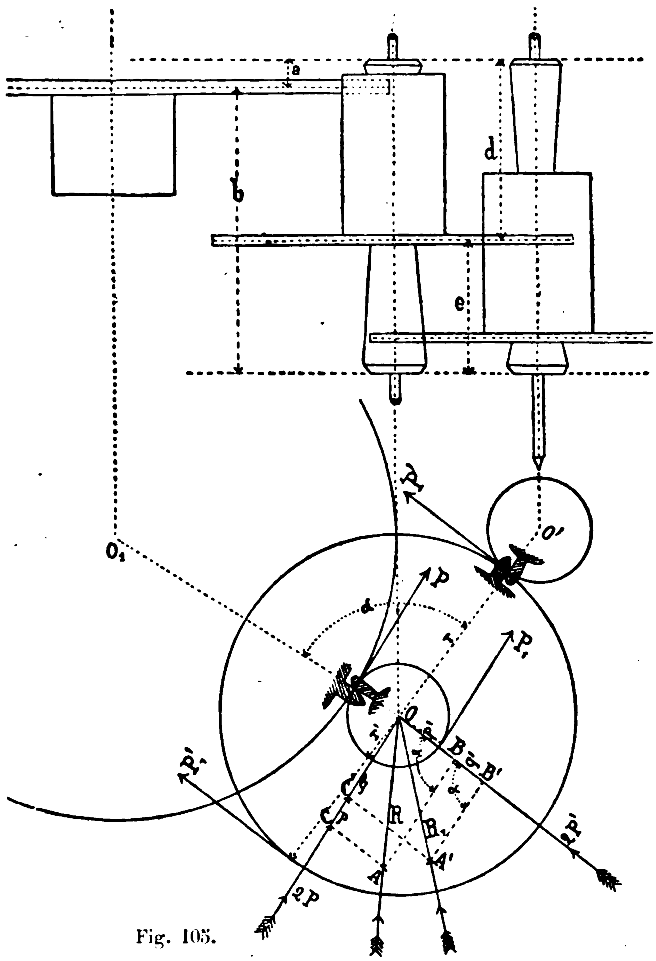


Fig. 105.

Pour déterminer les valeurs p et q, nous tirons de la première formule

$$q = 2\,\text{P} - p,$$

d'où, en substituant cette valeur dans la deuxième,

$$pa = 2\,\text{P}b - pb$$

et

$$p = 2\,\mathrm{P}\,\frac{b}{a+b}.$$

D'une manière analogue, on a

$$q = 2\,\mathrm{P}\,\frac{a}{a+b}.$$

Les pivots reçoivent en outre une action des forces P′ et P'_1, dont la résultante est 2P′, et nous aurons

$$2\mathrm{P}' = p' + q',$$

p' et q' étant les efforts reçus par chaque pivot de la part de 2P′. On aura ainsi

$$p' = 2\,\mathrm{P}'\,\frac{e}{a+b}$$

et

$$q' = 2\,\mathrm{P}'\,\frac{d}{a+b},$$

en remarquant que $d + e = a + b$.

Comme $\mathrm{P}' = \mathrm{P}\,\frac{r'}{r}$, on écrira encore

$$p' = 2\,\mathrm{P}\,\frac{r'}{r}\cdot\frac{e}{a+b} \quad \text{et} \quad q' = 2\,\mathrm{P}\,\frac{r'}{r}\cdot\frac{d}{a+b}.$$

Le pont supérieur recevant donc les deux forces p et p', leur résultante commune sera, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélogramme construit avec ces droites comme côtés.

Remarquons que, puisque nous avons ajouté à P et P′ les forces P_1 et P'_1 égales entre elles, la résultante réelle R devra être la moitié de celle qui est ainsi déterminée.

Pour calculer cette valeur, représentons par α l'angle formé par les lignes des centres ayant leur point de rencontre en O ; nous aurons ainsi l'angle OBA égal aussi à α. Dans le triangle OBA, on a $\mathrm{OB} = p'$ et $\mathrm{BA} = p$, puis $\mathrm{OA} = 2\,\mathrm{R}$, donc

$$2\,\mathrm{R} = \sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\alpha},$$

ou bien, en remplaçant p et p' par la moitié de leur valeur, on obtient :

$$R = \sqrt{\left(P\frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(P'\frac{r'}{r}\cdot\frac{e}{a+b}\right)^2 - 2P^2\frac{b}{a+b}\cdot\frac{r'}{r}\cdot\frac{e}{a+b}\cos\alpha}$$

et

$$(1) \qquad R = \frac{P}{a+b}\sqrt{b^2 + \left(\frac{r'}{r}\cdot e\right)^2 - 2\,eb\frac{r'}{r}\cdot\cos\alpha.}$$

Pour le pivot inférieur, on obtiendrait, d'une manière analogue :

$$(2) \qquad R_1 = \frac{P}{a+b}\sqrt{a^2 + \left(\frac{r'}{r}\,d\right)^2 - 2\,ad\,\frac{r'}{r}\cdot\cos\alpha.}$$

368. En examinant la fig. 105, on remarquera que la pression des dents de la roue de centre est plus considérable que la résistance qu'opposent les ailes du pignon de secondes. En conséquence, pour le pivot supérieur de la roue moyenne, la force OC $= p$ sera plus forte que la force OB $= p'$.

Pour le pivot inférieur, la pression de la roue de centre diminue, la force OC' $= q$ devient plus faible et la force OB' $= q'$ plus forte. Il en résulte nécessairement une direction différente des résultantes R et R_1, ce que montre la construction du parallélogramme des forces.

La direction de ces résultantes est importante et permet d'expliquer la raison pour laquelle on rencontre, dans les réparations, des trous de pivots agrandis par l'usure dans un sens souvent très différent de celui où il semblerait que cette usure doit logiquement se produire. Ce fait se remarque dans des pendules ou des montres de poche dont les trous ne sont pas empierrés.

369. Remarquons ensuite que le problème précédent est basé sur le cas des engrenages à flancs lorsque le contact a lieu sur la ligne des centres ; les forces normales sont alors perpendiculaires aux rayons. Mais, lorsque le contact entre la dent et l'aile se déplace ou lorsque l'engrenage est d'un autre genre, les forces normales prennent d'autres direc-

tions et la valeur des résultantes, comme aussi leur direction, peuvent subir un léger changement.

370. Les équations (1) et (2) montrent que, toutes choses égales d'ailleurs, les pressions deviennent les plus fortes avec un angle $\alpha = 180°$ pour lequel $\cos \alpha = -1$; le signe du dernier terme placé sous le radical devient alors positif. A ce point de vue, il ne serait donc pas avantageux de construire un rouage dont tous les mobiles seraient en ligne droite.

371. Constatons aussi que, plus la valeur de r augmente, plus la pression diminue; c'est une des raisons pour lesquelles il est bon d'augmenter le plus possible le diamètre des roues de centre et moyenne, l'inertie n'ayant pas encore d'influence appréciable sur ces mobiles.

372. Enfin, il ne parait point inutile d'observer que le rapport $\frac{r'}{r}$ ne peut être remplacé par le rapport des nombres de dents, puisque les mobiles de rayons r et r' n'engrènent pas ensemble, mais sont montés sur le même axe.

373. **Exemple numérique.** — Soit :

$$P = 77{,}5 \text{ gr}; \quad a = 0{,}8; \quad b = 4{,}06; \quad d = 3{,}2; \quad e = 2{,}2;$$
$$r' = 0{,}87; \quad r = 5{,}49; \quad \alpha = 95°.$$

Nous aurons pour le pivot supérieur :

$$\frac{P}{a+b} = \frac{77{,}5}{4{,}86} = 15{,}95, \qquad \frac{r'}{r} = \frac{0{,}87}{5{,}49} = 0{,}16$$

et

$$b^2 = 4{,}06^2 = 16{,}48, \qquad \left(\frac{r'}{r} e\right)^2 = \left(0{,}16 \times 2{,}2\right)^2 = 0{,}1239,$$

$$2\,ad.\frac{r'}{r} \cdot \cos \alpha = 2 \times 2{,}2 \times 4{,}06 \times 0{,}16 \times -0{,}08715 = -0{,}25.$$

$$R = 15{,}95 \sqrt{16{,}18 + 0{,}1239 + 0{,}25}$$

et

$$R = 15{,}95 \sqrt{16{,}8539} = 65{,}47.$$

Pour le pivot inférieur, on aura successivement

$$R_1 = 15{,}95 \sqrt{0{,}8^2 + \overline{0{,}16 \times 3{,}2}^2 - 2 \times 0{,}8 \times 0{,}32 \times 0{,}16 \times \cos 95°}$$

et

$$R_1 = 15{,}95\sqrt{0{,}64 + 0{,}26 + 0{,}07},$$

$$R_1 = 15{,}95\sqrt{0{,}97} = 15{,}71.$$

374. Déterminons maintenant la valeur du travail du frottement des pivots de la roue moyenne pendant une oscillation du balancier. Nous avons la formule (365)

$$Tr.\ F = fPr_1\beta,$$

dans laquelle P représente la pression, r_1 le rayon du pivot, β l'angle parcouru pendant une oscillation.

Recherchons d'abord ce dernier angle. La roue de secondes exécute une rotation en 60 secondes ou en 300 oscillations. Si la roue moyenne a 75 dents et le pignon de secondes 10 ailes, cette première roue tourne 7,5 fois plus lentement que la seconde ; elle exécute donc un tour en $300 \times 7{,}5$ oscillations $= 2250$ oscillations.

Pendant une oscillation, elle parcourra un angle β :

$$\beta = \frac{360^\circ}{2250} = 0^\circ\,9'36'';$$

cet angle, exprimé en longueur d'arc de rayon égal à l'unité, est

$$0^\circ\,9'36'' = 0{,}00279$$

ou 0,0028 en chiffre rond.

Le diamètre des pivots étant 0,26, nous aurons pour le pivot supérieur

$$Tr.\ F = 0{,}15 \times 65{,}47 \times 0{,}13 \times 0{,}0028 — 0{,}0035 \text{ gr. mm.}$$

et pour le pivot inférieur

$$Tr.\ F = 0{,}15 \times 15{,}71 \times 0{,}13 \times 0{,}0028 = 0{,}00085 \text{ gr. mm.}$$

Le travail total absorbé par le frottement sera par suite

$$Tr.\ F = 0{,}0035 + 0{,}00085 = 0{,}00435 \text{ gr. mm.}$$

Le travail de la force motrice appliquée à cette roue étant de 0,21 gr. mm. pendant la durée d'une oscillation du balancier, on peut constater que le travail absorbé par le frottement des pivots en représente à peu près la cinquantième partie.

Influence de l'huile.

375. Nous avons dit, au début de l'étude du frottement, que l'introduction d'un corps gras entre les surfaces frottantes de deux corps astreints à glisser l'un sur l'autre est nécessitée dans tous les cas où un échauffement et, par suite, le grippement et l'usure sont à redouter.

Quand des substances grasses sont interposées entre deux surfaces, celles-ci ne sont plus en contact immédiat ; les molécules des corps gras forment de petites sphères qui roulent entre les deux corps. Dans la généralité des cas, spécialement en grosse mécanique, le frottement sera pas ce fait diminué.

En horlogerie, surtout dans les montres de poche, le phénomène inverse peut se présenter. L'huile dont on fait usage, introduit une résistance nouvelle, une adhérence ou autrement dit un « collement ». Cette nouvelle résistance s'ajoute au frottement et il peut se faire que le coefficient de la somme des deux résistances soit plus élevé que le coefficient du frottement à sec. En regard des faibles forces en action sur les derniers mobiles du rouage, sur ceux de l'échappement et sur le balancier, cette dernière résistance n'est plus négligeable. Il est malheureusement très difficile d'exprimer cette force en chiffres, car elle dépend de la nature de l'enduit, de son degré de fluidité et de son inaltérabilité.

Le frottement qui s'exerce par l'intermédiaire d'un enduit dépend de la vitesse des corps en contact et de l'étendue de leurs surfaces. Il dépend aussi de la nature du mouvement ; ainsi, il est différent sur un balancier annulaire lorsque celui-ci est animé d'un mouvement circulaire continu et lorsqu'il est animé d'un mouvement oscillatoire (circulaire alternatif). On comprend, dans ce dernier cas, qu'une certaine quantité d'huile participe au mouvement des pivots et que cette huile ait une tendance à persévérer dans le sens

du mouvement, alors que les pivots tournent déjà en sens opposé.

Dans toutes les expériences relatives au frottement des corps graissés, il faut avoir soin de s'assurer que les enduits ne soient ni altérés ni expulsés.

On peut poser comme principe général que le meilleur enduit est celui qui est le plus fluide, c'est-à-dire qu'il y a avantage, quand on peut, à remplacer la graisse par l'huile, l'huile par l'eau, l'eau par l'air, ce qui équivaut à supprimer tout enduit. Ceci suppose que la vitesse du mobile soit assez grande pour ne pas expulser l'enduit expérimenté. Or il faut une vitesse considérable pour que les pièces gardent un enduit fluide comme de l'eau et à plus forte raison encore pour qu'elles laissent entre elles une couche suffisante d'air. Certaines expériences ont donné l'étonnant résultat de voir le frottement presque supprimé entre deux pièces frottant sans enduit avec une vitesse énorme [1]. Cette presque-disparition du frottement est due à l'interposition d'un coussinet d'air, matière parfaitement élastique, entre les surfaces de contact.

En horlogerie, dans tous les cas où l'emploi d'un enduit est nécessaire, il faudrait donc tenir compte de la vitesse des mobiles et des pressions qu'ils ont à supporter. Ainsi les roues du mécanisme du remontoir devraient toujours être graissées au moyen d'un enduit demi-fluide [2]; le ressort moteur, ainsi que les pivots de l'arbre autour desquels tourne le barillet, devraient être enduits d'une huile plus grasse que celle que l'on emploie pour le rouage et l'échappement.

Les qualités principales de l'huile fine dont on fait usage en horlogerie, doivent être son inaltérabilité à l'air et aux diverses températures que la montre doit affronter, sa parfaite fluidité et l'absence d'acides dans sa composition. Il

[1] Expériences de Hirn.

[2] Les praticiens estiment beaucoup, pour ces mobiles, un mélange de cire blanche très pure et d'huile animale fine.

appartient à la chimie organique de résoudre cette question importante, en vue de conserver le plus longtemps possible la précision de marche aux instruments chronométriques.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES ENGRENAGES

Des fonctions du cœur dans les chronographes.

376. Les chronographes sont des instruments horaires destinés à la mesure de très petits intervalles de temps. A cet effet, ces montres sont munies d'une aiguille spéciale fixée au centre du cadran et parcourant une division généralement extérieure au cercle des minutes. L'intervalle de temps le plus faible mesuré par l'aiguille du chronographe est égal à la durée d'une oscillation du balancier ; ainsi, lorsque le balancier de la montre bat 18 000 oscillations par heure, le chronographe indique la durée d'une observation à un cinquième de seconde près [1].

Ces mécanismes sont de constructions très variées ; leur mouvement est commandé par le rouage de la montre en occasionnant par le fait une légère surcharge à la force motrice. Avant l'observation, l'aiguille du chronographe est fixe et demeure snr la division zéro. En pressant sur une poussette extérieure, cette aiguille se met instantanément en mouvement ; à la fin de l'observation, une seconde pression arrête l'aiguille et enfin, après lecture, une troisième pression la ramène subitement sur la division zéro, où elle demeure retenue jusqu'à l'instant d'un nouvel emploi de sa fonction.

[1] M. C.-W. Schmidt, ingénieur suédois établi à Paris, a construit des chronographes indiquant la durée d'une fraction d'oscillation ; ces appareils à déclanchement et arrêt électromagnétiques sont destinés spécialement à mesurer la vitesse des projectiles.

L'invention du chronographe remonte à l'année 1862 et est due à M. Adolphe Nicole, originaire de la vallée de Joux, mais établi à Londres.

377. Il n'entre pas dans le cadre de cette étude de décrire le mécanisme de cet instrument ; il nous suffira d'indiquer que la fonction du retour de l'aiguille au zéro de la division s'effectue par la chute d'un *sautoir* sur une *excentrique en cœur* fixée sur l'axe de la roue qui porte l'aiguille du chronographe. C'est la détermination de la forme à donner à cette excentrique qui nous occupera spécialement ici.

La condition que doit remplir le cœur, est de présenter, à tous les points de son contour, au levier (ou sautoir) qui l'actionne, un incliné suffisant pour assurer le glissement du levier jusqu'à la naissance de la courbe.

En imaginant l'axe sur lequel est fixé le cœur, animé d'un mouvement circulaire continu et l'extrémité du levier constamment appuyé sur le bord extérieur de la courbe, le problème consiste à rechercher la forme capable de transformer uniformément un mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif.

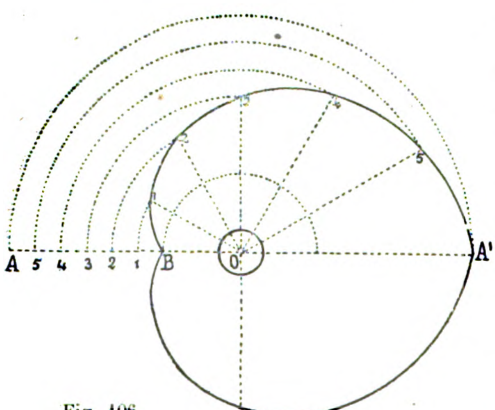


Fig. 106.

378. Examinons d'abord le cas plus simple de la transformation d'un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif au moyen de l'excentrique en cœur.

Comme le mouvement alternatif doit être uniforme, le point B de la droite BA (fig. 106) devra successivement occuper les positions équidistantes B, 1, 2, 3, 4... A, les longueurs B1, 1-2, 2-3, 3-4... étant supposées des parties fractionnaires égales de la course totale BA. Si, du point O

comme centre, on décrit des circonférences passant par les points B, 1, 2, 3, 4,...A et que l'on divise la circonférence de rayon OA en un même nombre de parties que la droite AB, les intersections des rayons passant par les points de division avec les circonférences indiqueront successivement les points par lesquels devra être décrite la courbe-enveloppe du point B. Par construction, le mouvement uniforme de cette courbe autour du centre O communiquera un mouvement rectiligne uniforme au point B, alternativement de A en B et de B en A, la partie inférieure de la courbe devant naturellement être symétrique avec la partie supérieure. On reconnaît ainsi que la forme obtenue est celle d'une *spirale d'Archimède* allongée dont l'équation est

$$\rho = a\omega + C;$$

le rayon vecteur ρ, moins une quantité constante C, est toujours proportionnel à l'angle décrit ω.

379. Dans les chronographes, le mouvement alternatif du point B n'est plus rectiligne ; il est circulaire et son mouvement s'exécute autour d'un centre O′ (fig. 107).

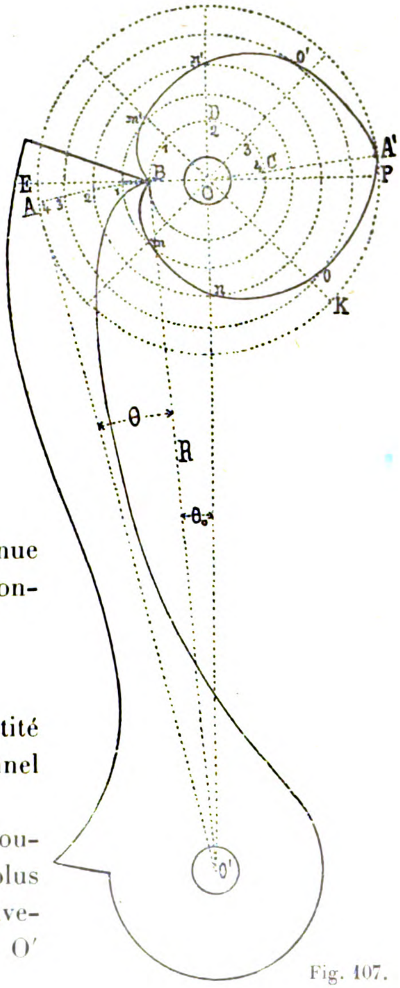


Fig. 107.

Soit donc maintenant à déterminer la forme du cœur convenant à la nouvelle condition ci-dessus et soit à faire parcourir à l'extrémité pointue d'un levier O′B l'arc AB d'un mouvement uniforme, pendant que l'axe O tourne de l'arc BDC $= \pi r_0$. Divisons les arcs AB et BDC en un même nombre de parties égales et décrivons du centre O des circonférences

concentriques passant par les points de division de l'arc AB ; menons ensuite les rayons passant par les points de division de l'arc BDC. Pour déterminer maintenant les points *m*, *n*, *o*, A′ et *m′*, *n′*, *o′* de la courbe du cœur, considérons, comme dans le cas précédent, les intersections des circonférences et des rayons, mais reportons ici en plus les longueurs d'arcs comprises sur chaque circonférence entre le rayon initial BE et l'arc décrit par le point B du levier en avant des points d'intersection considérés. On obtient ainsi la courbe B*mno* A′*o′n′m′*, qui satisfait aux conditions voulues. En effet, supposons, par exemple, le point *o* du cœur parvenu au point 3 de l'arc BA : le rayon OK se superposera sur le rayon BE ; l'axe du cœur a accompli les trois quarts de sa course et, dans le même temps, le point B du levier aura été soulevé des trois quarts du chemin BA.

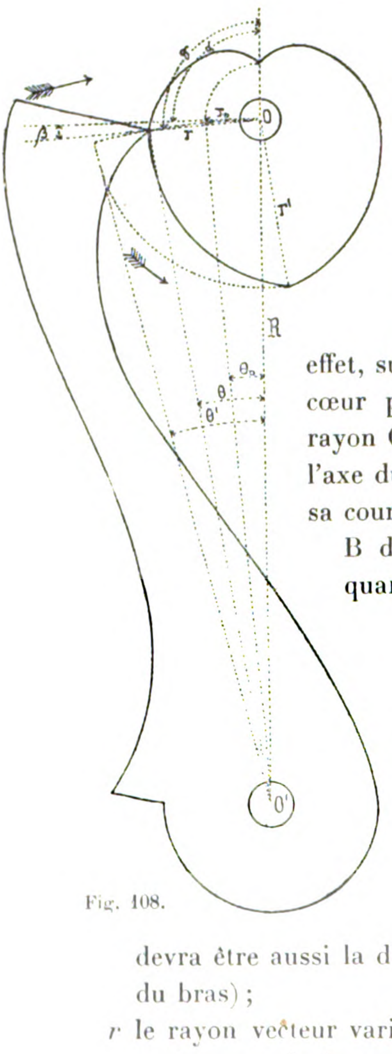


Fig. 108.

380. Proposons-nous de déterminer par le calcul la valeur du rayon vecteur du cœur correspondant à la pointe du levier pour une position quelconque de l'axe de l'excentrique (fig. 108).

Soit :

R la distance entre le centre de rotation du cœur et celui du bras (R devra être aussi la distance du point de contact au centre du bras) ;

r le rayon vecteur variable du centre du cœur à un point quelconque de la courbe extérieure ;

r_0 le rayon vecteur du cœur correspondant à la position de repos lorsque l'aiguille du chronographe est à zéro ;

r' le plus grand rayon vecteur du cœur ;
α l'angle formé par les rayons vecteurs r_0 et r ;
θ l'angle formé par la ligne des centres OO' et le rayon R du bras lorsque ce dernier est en contact avec le rayon vecteur r du cœur ;
θ_0 cet angle lorsque le bras est en contact avec le rayon r_0 ;
θ' cet angle lorsque le bras est en contact avec le rayon r'.

Le rayon r est donc la corde d'un arc de cercle de rayon R et correspondant à un angle θ ; on peut écrire

$$r = 2\,\mathrm{R}.\sin\frac{1}{2}\theta.$$

L'angle α, formé par le rayon vecteur r_0 et le rayon considéré r, est différent de l'angle dont le cœur doit tourner à partir de la position de repos jusqu'à l'instant où le rayon r vient coïncider avec la pointe du levier. En désignant ce dernier angle par γ, nous aurons en effet

$$\gamma = \alpha \pm \beta$$

selon que l'axe tourne à gauche ou à droite, β étant l'angle formé par la direction fixe du rayon r_0 et celle qu'occupe le rayon r à l'instant du contact avec le levier. Posons

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\theta - \theta_0\right);$$

cet angle étant inscrit dans la circonférence de rayon R et $\theta - \theta_0$, angle au centre embrassant le même arc, nous aurons par suite

$$\gamma = \alpha \pm (\theta - \theta_0).$$

Etablissons maintenant la relation entre les angles $\theta - \theta_0$ et γ, angles qui doivent être dans un rapport déterminé en vertu du principe mécanique d'après lequel la transmission de la force est uniforme lorsque les angles parcourus dans le même temps par deux mobiles qui se conduisent, restent constamment dans le même rapport. Or, lorsque le levier parcourt l'angle total $\theta' - \theta_0$, le cœur exécute un demi-tour, donc un angle égal à π ; on aura par conséquent

$$\frac{\gamma}{\theta - \theta_0} = \frac{\pi}{\theta' - \theta_0},$$

d'où

$$\gamma = \frac{\pi(\theta - \theta_0)}{\theta' - \theta_0}.$$

Par suite, on peut écrire

$$\alpha = \pi \frac{\theta - \theta_0}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\left(\theta - \theta_0\right)$$

et

$$\alpha = \pi \frac{\theta}{\theta' - \theta_0} - \pi \frac{\theta_0}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\theta \pm \frac{1}{2}\theta_0,$$

puis

$$\alpha + \pi \frac{\theta_0}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\theta_0 = \pi \frac{\theta}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\theta,$$

d'où

$$\alpha + \pi \frac{\theta_0}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\theta_0 = \left(\frac{\pi}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\right)\theta.$$

On aura ainsi :

$$\theta = \frac{\alpha + \pi \frac{\theta_0}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}\theta_0}{\frac{\pi}{\theta' - \theta_0} \mp \frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{\frac{\pi \pm \frac{1}{2}(\theta' - \theta_0)}{\theta' - \theta_0}} + \theta_0.$$

L'équation des deux branches de la courbe du cœur exprimée en coordonnées polaires sera donc

$$r = 2\,\mathrm{R}.\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\frac{\pi}{\theta' - \theta_0} \pm \frac{1}{2}} + \theta_0\right)$$

381. **Calcul numérique.** — Admettons

$$r_0 = 2\,\mathrm{R}.\sin\frac{1}{2}\theta_0 = 4,$$

$$r' = 2\,\mathrm{R}.\sin\frac{1}{2}\theta' = 24,$$

$$\mathrm{R} = 140.$$

Nous aurons :

$$\sin\frac{1}{2}\theta_0 = \frac{4}{280} \text{ et } \sin\frac{1}{2}\theta' = \frac{24}{280},$$

ce qui donne

$$\theta_0 = 1^\circ 38' 13'',6,$$
$$\theta' = 9^\circ 50' 3'';$$

par suite

$$\theta' - \theta_0 = 8^\circ 11' 49'', 4.$$

Exprimés en secondes d'arc, les angles θ_0, $\theta' - \theta_0$ et π donnent

$$\theta_0 = 5\,893{,}6 \text{ secondes},$$
$$\theta' - \theta_0 = 29\,509{,}4 \text{ secondes},$$
$$\pi = 648\,000 \text{ secondes}.$$

Calculons d'abord l'équation ci-dessus sous la forme

$$r = 2\,\mathrm{R}.\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\dfrac{\pi + \frac{1}{2}(\theta' - \theta_0)}{\theta' - \theta_0}} + \theta_0\right)$$

et soit $\alpha = 30^\circ$.

Nous aurons

$$\pi = 648000'', \quad \log: \left(\pi + \frac{1}{2}(\theta' - \theta_0)\right) = 5{,}8213528,$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta' - \theta_0\right) = \underline{14754{,}7}, \quad - \quad \log: (\theta' - \theta) = \underline{4{,}4699589}.$$
$$662754{,}7 \qquad\qquad 1{,}3513939$$

$$\text{L'angle } \alpha = 30^\circ = 108000'',$$
$$\log: 108000 = 5{,}0334238,$$
$$-\log: \frac{\pi + \frac{1}{2}(\theta' - \theta_0)}{\theta' - \theta_0} = \frac{1{,}3513939}{3{,}6820299} = \log: 4808'',72.$$

$$4808{,}72 + \theta_0 = 4808{,}72 + 5893{,}6 = 10702'',32,$$

donc

$$\theta = 2^\circ 58' 22'', 32,$$
$$\frac{1}{2}\theta = 1^\circ 29' 11'', 16;$$

$$\log: \sin\frac{1}{2}\theta = 8{,}4139741,$$
$$\log: 2\,\mathrm{R} = \underline{2{,}4471580},$$
$$\log: 2\,\mathrm{R}.\sin\frac{1}{2}\theta = 0{,}8611321$$

d'où

$$r = 7{,}26327 \text{ pour } \alpha = 30^\circ.$$

Des calculs analogues donneraient successivement :

$$r = 10,5254 \text{ pour } \alpha = 60°,$$
$$r = 13,7862 \quad » \quad \alpha = 90°,$$
$$r = 17,0451 \quad » \quad \alpha = 120°,$$
$$r = 20,3017 \quad » \quad \alpha = 150°,$$
$$r = 23,5623 \quad » \quad \alpha = 180°.$$

Pour l'autre branche de la courbe, la formule serait :

$$r = 2 \text{ R. } \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\dfrac{\alpha}{\pi - \frac{1}{2}(\theta' - \theta_0)}}{\theta' - \theta_0} + \theta_0 \right),$$

et des calculs identiques au précédent donneraient les résultats suivants :

$$r = 7,4153 \text{ pour } \alpha = 30°,$$
$$r = 10,8294 \quad » \quad \alpha = 60°,$$
$$r = 14,240 \quad » \quad \alpha = 90°,$$
$$r = 17,66 \quad » \quad \alpha = 120°,$$
$$r = 21,06 \quad » \quad \alpha = 150°,$$
$$r = 24,4648 \quad » \quad \alpha = 180°.$$

Pour ce dernier calcul, le rayon r n'appartient plus à la courbe fermée, mais bien au prolongement de cette courbe. Remarquons que le plus grand rayon vecteur r' doit être égal a 24.

Si l'on voulait connaître encore la valeur de l'angle β, correspondant aux données ci-dessus, on aurait :

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\theta' - \theta_0\right) = \frac{8° \, 11' \, 49'', 4}{2} = 4° \, 5' \, 54'', 7.$$

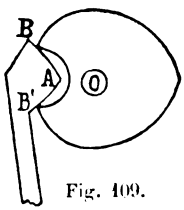


Fig. 109.

382. Pour obtenir une plus grande stabilité de l'aiguille du chronographe, on préfère parfois exécuter le cœur suivant la forme ci-contre (fig. 109) ; on supprime ainsi une partie de sa courbe, mais, par contre, la partie BAB' du bras est terminée par des courbes remplissant les conditions désirées.

CHAPITRE V

DES ÉCHAPPEMENTS

INTRODUCTION

383. Nous avons défini l'échappement dans la première partie de cet ouvrage (72) en disant que sa fonction consiste à rendre au pendule ou au balancier la vitesse que lui ont fait perdre les résistances passives.

L'échappement reçoit la force qui lui est transmise par le rouage et la transmet à son tour à l'organe régulateur. Cette restitution de force s'effectue périodiquement pendant une fraction d'oscillation. Pendant la partie de l'oscillation ou pendant les oscillations sans impulsion extérieure, la roue d'échappement est arrêtée jusqu'à l'instant du prochain dégagement. Ce *dégagement* est opéré par le balancier lui-même à l'instant voulu et la roue, devenant alors libre, lui imprime une nouvelle impulsion.

384. La manière dont se produit l'arrêt de la roue d'échappement, diffère avec chaque système. En thèse générale on peut cependant en considérer deux catégories, dans lesquelles viendront se classer tous les genres actuels.

La première de ces divisions comprend tous les systèmes dans lesquels la roue d'échappement, après avoir accompli l'impulsion, vient s'appuyer contre l'axe du balancier ou contre une pièce qui s'y trouve invariablement fixée. L'arrêt de ces échappements ne s'effectue donc qu'au détriment de la vitesse du balancier, puisqu'il se produit par le fait une

pression plus ou moins considérable contre son axe. Tels sont, par exemple, les échappements duplex et à cylindre des montres et quelques ancres de pendules.

Dans la seconde division viennent se placer tous les systèmes dans lesquels la roue est arrêtée par une pièce indépendante du balancier, laissant ainsi ce dernier poursuivre son oscillation en complète indépendance du mécanisme extérieur. Tels sont les échappements à ancre et à détente.

385. La première de ces divisions prend naturellement la dénomination *d'échappements à repos frottant* et la seconde celle *d'échappements libres*.

386. Si l'on considère les échappements d'ancienne construction et même quelques systèmes modernes, on constate que les effets du repos se compliquent souvent d'effets *de recul* de la roue et par suite on a admis quelquefois une classification spéciale pour ces genres. Les systèmes dits à *force constante* mériteraient alors aussi un classement à part. Il est conséquemment plus simple de n'admettre que les deux grandes divisions que nous venons d'indiquer et d'y faire rentrer tous les genres connus en n'envisageant pour cela que l'effet du repos de l'échappement sur le balancier ou le pendule.

387. Afin de se rendre compte d'une manière générale de l'influence de l'échappement sur la durée de l'oscillation et pour être à même de juger les qualités d'un tel mécanisme à ce point de vue, examinons d'abord l'effet produit par une force extérieure agissant dans un sens ou dans l'autre sur un balancier en mouvement.

388. **Influence d'une force extérieure sur la durée des oscillations d'un balancier.** — Un balancier oscillant librement sous la seule influence du spiral se trouve dans les conditions voulues pour que ses oscillations soient *isochrones*, c'est-à-dire d'égale durée. En pratique cette liberté absolue n'existe jamais; les frottements des pivots, la résistance de l'air, les impulsions de l'échappement, les résistances du dégagement, les chocs de toute nature sont autant de causes qui concourent à dé-

truire l'isochronisme parfait, autrement dit à produire des *variations* dans la marche de la montre.

Nous nous proposerons d'étudier l'influence de ces forces extérieures et ne les envisagerons d'abord que comme forces instantanées agissant en des points divers du parcours du balancier.

389. Soit H (fig. 110) la position de repos du balancier. Supposons que l'oscillation commence au point B et qu'au même instant une force quelconque vienne s'ajouter à celle du spiral. Cette force, dont nous désignerons le moment par F, agit dans le sens du mouvement pendant le parcours du très petit angle B0*b*. A cause de l'adjonction de cette nouvelle force à celle du spiral, le balancier parcourra l'angle BOH $= \alpha_0$ avec une plus grande vitesse et par suite en moins de temps que lorsqu'il le parcourt sous la seule influence du spiral. La durée de cette *demi-oscillation descendante* sera donc *raccourcie*. Le balancier parviendra au point H avec une vitesse augmentée et, par suite, en arrivant au point C, où cette vitesse deviendrait nulle si la force F n'avait pas agi, il dépasse ce point d'une certaine quantité et parvient par exemple en *c*. En vertu du principe de l'isochronisme, la durée de cette *demi-oscillation ascendante* ne sera pas influencée, le balancier ayant parcouru ce plus grand angle avec une plus grande vitesse. La durée totale de l'oscillation ne s'en trouvera pas moins diminuée, puisque la demi-oscillation descendante l'a été; il y aura donc une *avance* dans la marche de la montre.

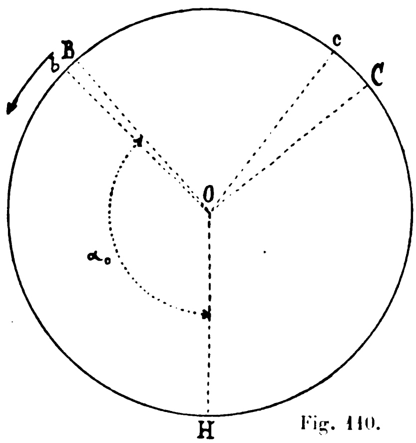


Fig. 110.

390. Imaginons maintenant ce même balancier parti encore

du point B, mais cette fois-ci sous la seule influence du spiral. Arrivé au point c' (fig. 111), situé très près de C, il reçoit une force dont le moment F agit pendant l'instant que le balancier emploie à parcourir l'angle c'OC et dans le sens même de son mouvement. On peut admettre qu'à l'instant où le balancier parvient en c', la durée normale de l'oscillation soit écoulée et la conséquence de l'application de la force F en ce point sera facile à déduire, puisque par ce fait le balancier devra encore parcourir un angle tel que COc. La durée de l'oscillation sera donc augmentée et on aura un *retard* dans la marche de la montre.

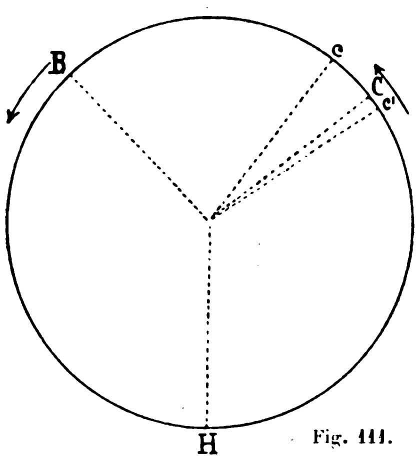


Fig. 111.

391. De la considération de ces deux cas extrêmes, il résulte déjà qu'il n'est pas nécessaire qu'une force change de direction pour diminuer ou pour augmenter la durée d'une oscillation du balancier; il suffit que son action s'établisse pendant la demi-oscillation descendante ou pendant la demi-oscillation ascendante.

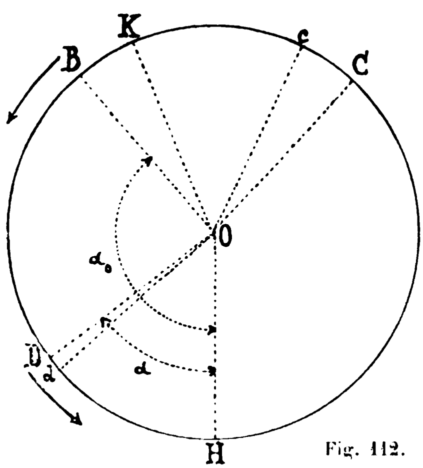


Fig. 112.

392. Examinons un troisième cas. Le balancier part encore du point B soumis à la seule action du spiral et parvient ainsi en un point D situé entre B et H dans la demi-oscillation descendante (fig. 112); en ce point D agit une force extérieure

dans le sens du mouvement et pendant le parcours du très petit angle DOd. Nous avons alors trois périodes à considérer pendant l'oscillation complète : ce sont celles pendant lesquelles le balancier parcourt les angles BOD, DOH et HOC.

Représentons l'angle DOH par α et envisageons-le comme variable, tandis que l'angle BOH, que nous désignerons par α_0, sera considéré comme constant.

La durée de l'oscillation ne sera pas modifiée par la force extérieure F tant que le balancier parcourt les angles BOD et HOC; la modification introduite par l'effet de cette force ne se fera sentir que pendant le parcours de l'angle DOH $= \alpha$, puisque cet angle est parcouru avec une plus grande vitesse et, par suite, en moins de temps.

Si la valeur du moment F est la même dans ce cas que dans le premier (389) et si les deux angles BOb (fig. 110) et DOd (fig. 112) sont les mêmes aussi, la vitesse au point d devra dans les deux cas rester la même. Dans le premier cas, le balancier a parcouru l'angle α_0 avec une vitesse immédiatement augmentée, tandis que dans celui-ci la vitesse a seulement changé pendant le parcours de l'angle α. La modification de durée se traduit donc ici encore par une *diminution* de temps et la seule différence sera, pour ce cas, une *avance* moins considérable que pour le premier.

393. Représentons par ΔT une augmentation de durée de l'oscillation et admettons la valeur variable α négative pendant la demi-oscillation descendante du balancier; ΔT devra être évidemment fonction de F, de α et de α_0, et nous pourrons exprimer cette relation par la formule

$$\Delta T = f\left(F\,\frac{\alpha}{\alpha_0}\right).\ [1]$$

394. Examinons encore un quatrième cas, c'est-à-dire celui dans lequel la force F agit sur le balancier pendant le par-

[1] Cette valeur ΔT dépend en outre du petit angle DOd, du moment d'inertie du balancier et du moment de la force du spiral, mais nous n'avons pas, pour le moment, à nous occuper de ces valeurs.

cours du petit angle EOe de la demi-oscillation ascendante (fig. 113). Nous avons de nouveau ici trois périodes à envisager, savoir le parcours des trois angles BOH, HOE et EOc. Il n'y a pas de changement dans la durée pendant le parcours des deux angles BOH et EOc; la modification n'aura lieu que pendant le parcours de l'angle HOE $= \alpha$.

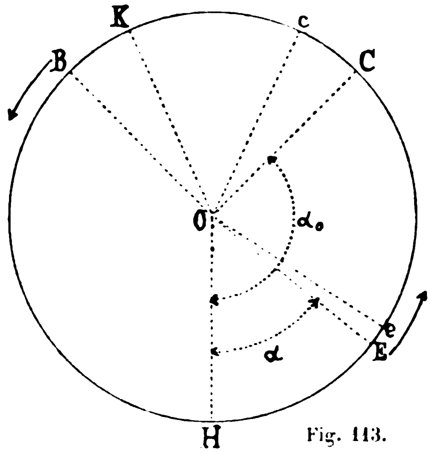


Fig. 113.

Pour prouver cette assertion, faisons une comparaison entre deux oscillations du même balancier. Admettons pour la première un point de départ K du balancier et l'oscillation s'accomplissant sous la seule action du spiral; la vitesse deviendra alors nulle au point c, de telle façon que l'on ait

$$\text{angle KOH} = \text{angle HO}c.$$

Pour la seconde oscillation, imaginons le balancier parti du point B et recevant pendant le parcours angulaire EOe l'action du moment de force F; supposons que le point de départ B ait été choisi de telle façon que pour cette oscillation influencée, comme dans la première, la vitesse devienne nulle au même point c.

Dans la première oscillation, le balancier parvient au point H avec une plus grande vitesse que dans la seconde, puisqu'il est parti de K dans le premier cas et de B dans le second. En conséquence, il parcourra l'angle HOE, dans ce dernier cas, avec une vitesse moindre et par suite emploiera plus de temps que dans le premier.

Par l'influence de la force F agissant après la position de repos H, la durée de l'oscillation subira une augmentation et il en résultera un *retard*.

395. L'équation

$$\Delta T = f\left(F \frac{\alpha}{\alpha_0}\right)$$

convient donc aussi pour la demi-oscillation ascendante. Si les valeurs de F et de α sont positives, ΔT sera aussi positif et s'ajoutera à la durée normale T pour produire une augmentation de la durée de l'oscillation.

Si ces deux valeurs sont négatives, c'est-à-dire si le moment F agit en sens inverse du mouvement pendant la demi-oscillation descendante, la valeur ΔT restera positive et il y aura également retard.

Si l'une des valeurs est positive et l'autre négative, ΔT deviendra négatif et il en résultera une avance. Ce fait se produit lorsque la force agit en sens contraire du mouvement pendant la demi-oscillation ascendante.

396. En résumé, nous pouvons donc formuler les principes généraux suivants :

Toute impulsion donnée au balancier pendant la demi-oscillation descendante, c'est-à-dire avant le passage de la position de repos, *accélère* les oscillations, tandis que toute impulsion agissant pendant la demi-oscillation ascendante les *retarde*.

Cette avance ou ce retard sont d'autant plus considérables que l'influence se manifeste plus loin du point de repos ou que l'amplitude des oscillations est plus faible.

Réciproquement, toute action agissant en sens contraire du mouvement, c'est-à-dire toute résistance, produit un *retard* pendant la demi-oscillation descendante et une *avance* pendant la demi-oscillation ascendante.

397. On peut maintenant se demander de quelle manière doit agir une force sur un balancier pour que son action ne modifie pas la durée des oscillations.

En thèse générale, la réponse est simple :

1° Il n'y aura aucun changement dans la durée si l'angle α devient nul par le fait dans l'équation

$$\Delta T = f\left(F \frac{\alpha}{\alpha_0}\right),$$

lorsque la force agit à l'instant où le balancier passe par le point de repos.

2° Il n'y aura non plus aucun changement dans la durée des oscillations lorsqu'une même force, agissant dans le sens du mouvement ou en sens contraire, est appliquée des deux côtés et à une même distance du point de repos. L'angle α doit donc être égal de part et d'autre de la ligne des centres. Il y aurait, par contre, changement de durée si la force agissait, par exemple, d'un côté dans un sens et de l'autre en sens opposé.

Ces deux conditions essentielles résument par conséquent le but auquel doit tendre toute construction d'échappement.

398. **Etude générale de l'influence de l'échappement sur la durée des oscillations du balancier.** — Il résulte de la défination que nous avons donnée du mécanisme de l'échappement (383), que sa fonction peut toujours être décomposée en trois périodes générales : période de repos, période de dégagement et période d'impulsion.

En faisant pour le moment abstraction de tout genre particulier, nous pouvons cependant examiner l'effet spécial de chacune de ces périodes sur la durée des oscillations du balancier et en déduire des considérations qui serviront à la construction de ces mécanismes.

Traduisons d'abord en langage ordinaire les deux règles que nous avons précédemment énoncées (397) :

1° *L'influence d'un échappement sur la durée des oscillations serait annulée si le contact de celui-ci avec le balancier pouvait se réduire à un choc instantané se produisant exactement au moment du passage du point de repos sur la ligne des centres* ;

2° *L'impulsion doit se produire avec une force égale et suivant deux angles égaux avant et après la position de repos.*

Remarquons que jusqu'à présent aucun système d'échappement ne remplit soit l'une soit l'autre de ces deux conditions.

399. En faisant abstraction de toute construction parti-

culière, examinons à un point de vue général l'effet de l'échappement sur la durée des oscillations.

Supposons un balancier dont l'amplitude d'oscillation soit de 240° (deux tiers de tour); l'angle α_0 sera donc de 120°. Admettons un parcours de 5° pendant l'opération du dégagement et 35° d'impulsion. La somme de ces deux derniers angles, soit 40°, forme ce que nous conviendrons d'appeler *l'angle de levée* du balancier; cet angle de levée se répartit généralement en parties égales d'un côté et de l'autre de la ligne des centres.

400. Lorsque le balancier commence son mouvement au point B (fig. 114), il parcourt en premier lieu l'angle B0*d* de 120° jusqu'à 20° avant la ligne des centres. Pendant ce trajet, les forces qui agissent sur le balancier sont, outre la force du spiral, le frottement des pivots et, si l'échappement est à repos frottant, celui qui résulte de la pression de la roue d'échappement contre l'axe du balancier. L'effet de ces deux frottements, agissant comme force résistante, produit une augmentation de durée. Remarquons que ce retard sera exactement compensé par l'avance produite par la même cause pendant le parcours de l'angle *f*OC de 20° jusqu'à 120° après la ligne des centres (en admettant comme constante la force résistante du frottement). Cet effet s'annulera donc pour l'oscillation entière. Pendant le parcours de l'angle *d*O*e* = 5°, soit de 20° jusqu'à 15° avant la ligne des centres, les mêmes forces peuvent être supposées agissant encore avec une intensité variable selon le genre d'échappement, puisqu'il s'agit ici du dégagement de la roue; mais l'effet de cette résistance ne sera

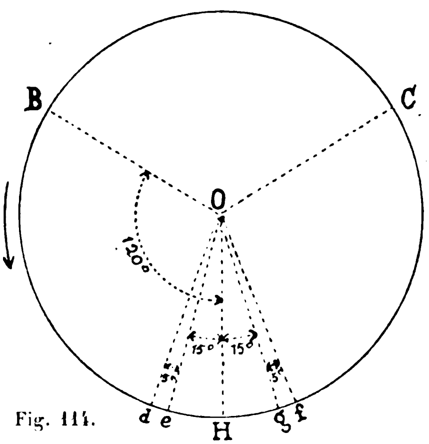


Fig. 114.

plus compensé maintenant par une résistance égale de l'autre côté de la ligne des centres et il en résultera par conséquent un retard.

Quand, plus loin, le balancier décrit l'angle *e*OH de 15°, il reçoit une impulsion qui, pendant la demi-oscillation descendante, produit une avance. Cette avance sera compensée par le retard correspondant à l'effet de cette même impulsion pendant le parcours de 0 à 15° de la demi-oscillation ascendante. L'impulsion se continuant ensuite de 15 à 20° produira, pendant ce parcours de 5°, un nouveau retard.

En somme, nous aurons une augmentation de durée pendant le parcours des deux angles *d*O*e* et *g*O*f*; ces deux angles sont égaux.

L'échappement a donc pour effet de retarder la durée de l'oscillation.

401. Si ce retard était régulier, c'est-à-dire s'il conservait une valeur égale pour toutes les amplitudes d'oscillations que le balancier accomplit, la marche de la montre n'en serait pas influencée, car on possède plusieurs moyens de la compenser.

402. Nous savons que les variations de la force motrice ont pour effet de modifier dans la formule de ΔT les valeurs de F et par suite celles de α_0. Nous aurons à déterminer dans la théorie du réglage la relation qui lie les variations de ces deux valeurs. Pour le moment nous ne nous occuperons de cette question qu'au point de vue suivant.

Lorsqu'une montre est placée verticalement, le frottement des pivots du balancier devient plus considérable que lorsqu'elle occupe une position horizontale; il en résulte nécessairement une diminution de l'amplitude des oscillations dans les positions verticales. La valeur de α_0 devenant plus faible dans la formule de ΔT, nous pouvons en conclure que

La marche d'une montre retardera plus dans les petites oscillations que dans les grandes, donc plus « au pendu » qu'« au plat », ceci par le seul fait du frottement des pivots en corrélation avec le fonctionnement de l'échappement.

403. Ce qui précède nous permet d'énoncer les règles suivantes pour servir à l'étude et à la construction des échappements.

1° Le frottement des pivots du balancier doit être aussi réduit que possible.

2° L'angle parcouru par le balancier pendant le dégagement doit être aussi faible que pratiquement possible.

3° L'angle de levée du balancier doit être aussi réduit que la sûreté du fonctionnement de l'échappement le permet.

4° L'amplitude des oscillations doit être aussi étendue que possible.

La pratique de l'horlogerie confirme rigoureusement ces quatre règles, que nous allons du reste examiner plus en détail.

404. Nous avons fait voir que le retard au pendu provient essentiellement du frottement des pivots du balancier, qui diminue l'amplitude des oscillations et accentue ainsi le retard produit par l'échappement. De l'énoncé de la première règle, il ne faudrait pas cependant se hâter de conclure qu'il faille exécuter les pivots plus petits que la sécurité absolue le réclame, car il ne faut pas oublier qu'un pivot courbé nuit beaucoup plus au réglage que s'il était d'un ou deux centièmes de millimètre plus gros. Les trous de pierre dans lesquels tournent les pivots, doivent être courts et de forme olivée; en effet, une partie de l'huile participe plus ou moins au mouvement de l'axe et il importe de construire les pivots, les trous et l'huilier des pierres de façon à rendre ce mouvement de l'huile le moins accentué possible. Il est presque inutile d'ajouter que les pivots doivent être parfaitement durs et polis, comme aussi du reste l'intérieur du trou des pierres.

Remarquons encore que le frottement varie avec l'état de l'huile; nous ne pouvons donc pas envisager celui-ci comme constant. Comme cette force agit pendant l'oscillation entière et comme nous savons que l'influence d'une force sur la durée des oscillations est d'autant plus considérable que son action s'exerce plus près du commencement de l'oscillation, nous

comprenons déjà maintenant une des raisons pour lesquelles une montre, placée dans des conditions identiques d'un jour à l'autre, présente néanmoins des variations assez sensibles dans sa marche diurne.

405. Nous avons fait voir ensuite que ce retard provient de la grandeur de l'angle *dOe* (fig. 114). Si donc une montre présente un retard sensible dans les positions verticales, il faudra examiner en premier lieu si la sécurité du fonctionnement permet de réduire l'angle parcouru par le balancier pendant l'opération du dégagement. Plus cet angle est faible, moins grande aussi sera son influence sur le réglage. La valeur de l'angle décrit par le balancier pendant le dégagement varie avec tous les systèmes d'échappement ; elle dépend de la valeur angulaire du « repos » et du rapport des longueurs des bras des leviers d'action.

406. Comme l'influence d'une force agissant sur le balancier dépend encore de la distance angulaire qui sépare son point d'application de la position de repos, il convient de réduire l'angle de levée du balancier autant que l'exécution pratique le permet. Remarquons qu'il est dangereux pour l'exactitude du fonctionnement de tous genres d'échappement de dépasser une limite inférieure facile à déterminer dans chaque cas. L'inertie des mobiles, le jeu des pivots et la plus ou moins parfaite exécution des diverses pièces de l'échappement sont autant de facteurs qui doivent entrer en ligne de compte pour la détermination de cette valeur. Quoi qu'il en soit, on peut envisager un angle de 45° comme maximum dans la grande généralité des cas, tandis qu'il est difficile de descendre au-dessous de 30° sans risquer de compromettre l'exactitude des fonctions du mécanisme.

407. Enfin, nous avons dit qu'on peut diminuer l'influence du dégagement en augmentant l'amplitude de l'oscillation. Ce résultat ne doit cependant pas être obtenu au moyen d'un balancier trop léger ou encore en réduisant le nombre d'oscillations; dans chacun de ces cas on perdrait d'un côté ce qu'on croirait avoir gagné de l'autre. Une augmentation de

l'amplitude ne saurait être avantageuse que lorsqu'elle est acquise aux dépens des résistances passives et des pertes de force provenant de vices de construction. Toutes les parties de la montre, spécialement le rouage et l'échappement, doivent être d'une exécution très précise ; ainsi on évitera les engrenages défectueux et les chocs, on réduira les chutes de l'échappement, on diminuera l'inertie des mobiles et les frottements; le balancier sera construit de façon à fendre aisément l'air. Remarquons que les frottements des pivots du balancier ne sont pas seulement diminués par une réduction de leur diamètre, mais qu'ils le sont aussi par le choix de la grandeur du balancier, un balancier grand et léger pouvant avoir le même moment d'inertie qu'un autre petit et lourd[1].

408. Les considérations générales qui précèdent nous permettent maintenant de nous rendre compte de l'avantage que présentent les échappements libres par rapport aux échappements à repos frottants. Nous pouvons le résumer comme suit :

Liberté du balancier pendant le parcours de l'arc d'oscillation supplémentaire, c'est-à-dire suppression du frottement résultant du contact de la roue d'échappement contre l'axe du balancier pendant la durée de ce parcours.

A l'énoncé de cette conclusion, on pourrait objecter que, d'après la loi de l'influence d'une force extérieure sur la durée des oscillations, le frottement provenant du contact de l'échappement pendant l'arc supplémentaire devrait voir son influence annulée, puisqu'il existe aussi bien pendant la demi-oscillation descendante que pendant la demi-oscillation ascendante. Cette objection serait juste si ce frottement avait une valeur constante et si l'état de fluidité de l'huile de-

[1] La formule du moment d'inertie d'un balancier est

$$A = \frac{P}{g} R^2$$

$\left(\frac{P}{g}\right.$ masse du corps, R rayon de giration$\left.\right)$. On voit que ce moment augmente non seulement en raison du poids, mais surtout proportionellement au *carré* du rayon de giration.

meurait invariable; il est facile de se rendre compte qu'il n'en est rien, qu'au contraire ces deux facteurs sont des quantités très variables et qu'il est par suite avantageux de les supprimer autant qu'il se peut. On évite ainsi une cause d'altération de la durée de l'oscillation et on augmente simultanément l'amplitude, ce qui a pour effet de réduire l'influence de l'échappement sur le réglage de la montre.

CHAPITRE VI

ÉCHAPPEMENT A ANCRE

DESCRIPTION GÉNÉRALE DE L'ÉCHAPPEMENT

409. Les organes dont se compose l'échappement à ancre sont au nombre de trois :

la roue d'échappement,
l'ancre et la fourchette,
la cheville et son plateau.

Chacun de ces organes est porté par un axe et la force est transmise de l'un à l'autre au moyen des dispositions que nous allons examiner successivement.

410. La **roue d'échappement** est portée par un pignon engrenant dans la roue de secondes; son mouvement s'exécute à droite. Sa composition métallique est d'acier, de laiton ou autre alliage analogue; dans ce dernier cas on recherche souvent les alliages qui résistent le mieux à l'aimantation. Les dents de cette roue présentent le plus fréquemment à leur extrémité une surface inclinée (fig. 115 et 116); d'autres

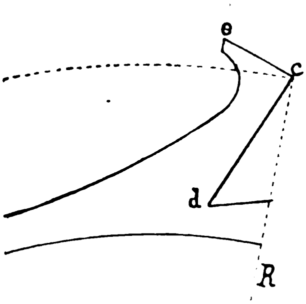


Fig. 115.

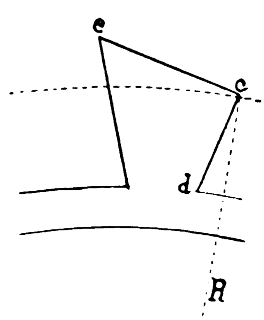


Fig. 116.

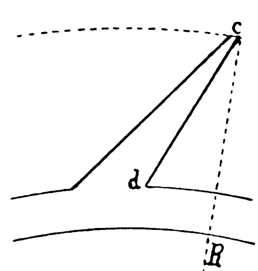


Fig. 117.

fois elles sont terminées par une pointe fine (fig. 117). Ces « inclinés » ou ces pointes sont destinés à agir sur l'ancre pour transmettre à cette pièce le mouvement dont la roue est animée. Dans chacun de ces cas, le devant de la dent, c'est-à-dire le plan projeté suivant *cd*, forme avec le rayon de la roue aboutissant au point *c* un angle dont l'ouverture varie avec la construction (généralement 24° pour les genres les plus fréquents).

La plan projeté suivant la droite *cd* se somme le *plan de repos* de la dent.

La surface projetée suivant la ligne *ce* s'appelle la *surface d'impulsion* de la roue ou simplement l'*incliné* de la dent.

Le nombre de dents de la roue d'échappement est le plus souvent limité à 15; dans les montres de petites dimensions, il peut être réduit à un chiffre inférieur, afin de conserver à l'ancre des dimensions suffisantes. Dans certains cas spéciaux il peut s'élever jusqu'à 18. Nous savons du reste que ce nombre de dents dépend du nombre d'oscillations du balancier et des nombres choisis pour les autres roues (136).

411. L'**ancre** est une pièce oscillante occupant une position intermédiaire entre la roue et le balancier. Sa composition métallique, de même que celle de la fourchette, est généralement mise en harmonie avec celle de la roue. Sa forme rappelle celle de l'instrument de fer de même dénomination employée sur les bateaux; de là lui vient sans doute son nom.

L'ancre est terminée à ses deux extrémités par des leviers, communément appelés *levées* (fig. 118); l'un A, appelé *levée d'entrée*, l'autre B *levée de sortie*. Ces deux levées ont leur extrémité extérieure formée par des surfaces dont les projections sont représentées par les droites *aa'* et *bb'* : ce sont les *surfaces d'impulsion* de l'ancre, contre lesquelles viennent agir celles des dents de la roue.

Le mouvement de la roue ayant toujours lieu dans le même sens, c'est-à-dire à droite, l'une de ses dents agissant contre la surface d'impulsion de la levée d'entrée de l'ancre, lui imprime un mouvement à droite, et, par contre, lorsqu'elle agit

sur la levée de sortie, elle lui communique un mouvement à gauche. Le mouvement de l'ancre est donc alternatif.

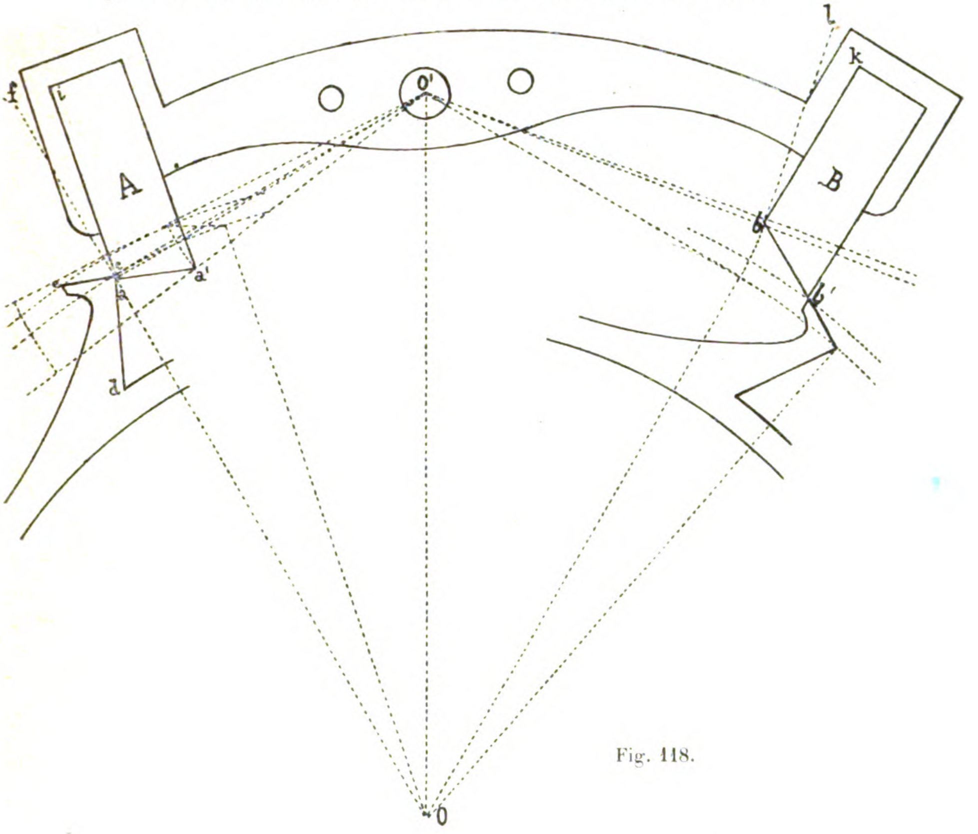


Fig. 118.

412. Les surfaces projetées en *ai* et *bk* sont les *plans de repos* de l'ancre. C'est contre ces plans que viennent tour à tour s'appuyer les pointes *c* des dents de la roue quand l'échappement est au repos, c'est-à-dire quand le balancier accomplit la partie de son oscillation pendant laquelle il n'est pas en contact avec l'échappement.

413. L'**angle de repos** est l'angle $cO'a$ que l'ancre décrit depuis la position de repos *c* jusqu'à ce que l'arête formée par l'intersection des plans de repos et d'impulsion vienne coïncider avec la pointe de la dent.

414. L'**angle d'impulsion** est l'angle parcouru par l'ancre

depuis la position dans laquelle une dent commence à agir sur sa surface d'impulsion jusqu'à ce que cette dent quitte la levée.

415. L'**angle de levée de l'ancre** est égal à l'angle de repos augmenté de l'angle d'impulsion. Dans la fabrication suisse, on a adopté pour cet angle une valeur de 10°; ce chiffre comprend 1 à 2 degrés de repos et 9 à 8 degrés d'impulsion.

416. Le **chemin perdu** est l'angle parcouru par l'ancre à partir de l'instant ou la dent quitte la surface d'impulsion de la levée jusqu'à ce que la fourchette ait rencontré un obstacle appelé « paroi », qui a pour but de limiter le chemin parcouru par l'ancre. Cet angle, qui doit être aussi faible que possible, est motivé par l'imperfection inévitable de l'exécution des organes de l'échappement et les ébats de pivots : c'est une sécurité pour le fonctionnement, mais en même temps une cause de perte de force.

417. L'**angle de levée du balancier** est l'angle qu'il décrit dès l'instant du premier contact de la cheville de plateau avec l'entrée de la fourchette jusqu'à la fin de ce contact. Cet angle comprend les deux périodes de dégagement et d'impulsion et varie entre les limites normales de 30 à 45 degrés.

418. La **chute** est l'angle parcouru par la roue depuis l'instant où une dent quitte le plan d'impulsion d'un des leviers jusqu'à l'arrêt de la roue produit par la rencontre d'une autre dent et du plan de repos de l'autre levier. Il existe donc deux chutes pour une même dent de la roue : la « chute intérieure », qui se produit après l'impulsion à la levée d'entrée, et la « chute extérieure » à la fin de l'impulsion à la levée de sortie. De même que le précédent, cet angle est une cause de perte de force exigée par la sécurité du fonctionnement du mécanisme; sa valeur doit donc être restreinte au strict nécessaire.

Remarquons que le planteur d'échappements peut déranger l'égalité des chutes en le plantant trop fort ou trop faible.

419. Le **recul** de la roue est l'angle rétrograde qu'elle doit

parcourir pendant le dégagement, c'est-à-dire pendant que l'ancre décrit la somme des angles de chemin perdu et de repos.

420. L'**angle de tirage** est l'angle *fci* (fig. 118), formé par le plan de repos *ci* et la perpendiculaire *cf* élevée au point de contact *c* sur la droite *cO'*. De cet angle dépendent donc l'énergie avec laquelle l'ancre est maintenue au repos par la pression de la dent au point *c*, la difficulté du dégagement et le recul de la roue.

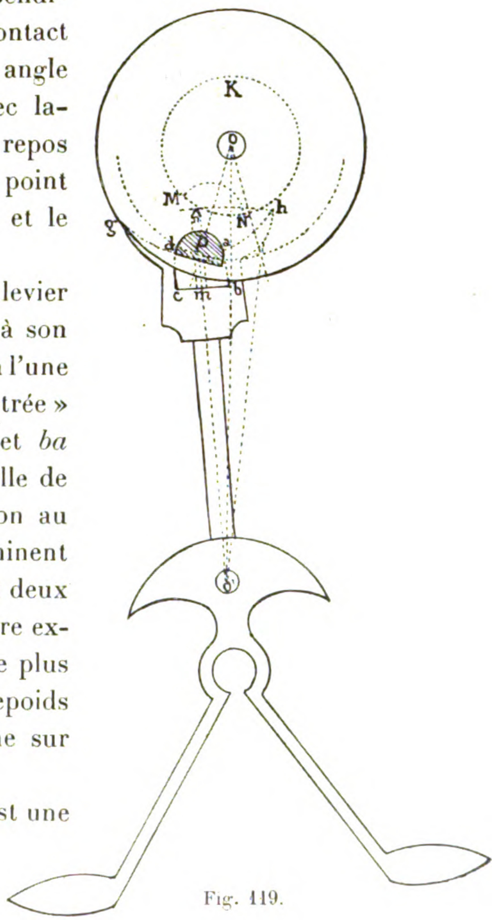


Fig. 119.

421. La **fourchette** est un levier fixé sur l'ancre et participant à son mouvement. Elle est terminée à l'une de ses extrémités par une « entrée » dont les côtés intérieurs *dc* et *ba* (fig. 119) agissent sur la cheville de plateau pour donner l'impulsion au balancier. Les « cornes » terminent les côtés de l'entrée en formant deux sortes de dents *dg* et *ah*. L'autre extrémité de la fourchette est le plus souvent terminée par un contrepoids destiné à équilibrer le système sur l'axe de l'ancre.

422. La **cheville de plateau** est une pièce P (fig. 119) ajustée dans un « plateau » fixé lui-même sur l'axe du balancier; elle participe donc au mouvement de ce dernier et a pour fonction de recevoir l'impulsion que lui donne la fourchette. La cheville se fait généralement en pierre dure, saphir ou rubis, et est encastrée perpendiculairement au plan du plateau qui la supporte. La forme de la section transversale de cette pièce est variable; on la rencontre le plus fréquemment elliptique, demi-circulaire, triangulaire, etc.

423. **Les organes du renversement** sont accessoires et ont pour but de parer à un inconvénient que ce genre d'échappement présenterait s'il en était dépourvu. En effet, pendant que le balancier accomplit la partie de son oscillation en dehors du contact avec l'échappement, l'ancre est retenue au repos par la pression d'une dent de la roue appuyée contre le plan de repos de l'un des leviers. Afin de ne pas opposer au mouvement du balancier une résistance trop considérable quand surviendra l'instant du dégagement, la valeur de l'angle de tirage est limitée et, en conséquence aussi, la force avec laquelle l'ancre est maintenue au repos. Or il peut arriver que la montre reçoive un choc extérieur, une secousse brusque, qui ait pour effet de dégager l'ancre du repos. La fourchette serait alors poussée vers la paroi opposée et lorsque le balancier, ramené par la force du spiral, se présenterait pour dégager l'ancre, la cheville, ne rencontrant plus l'entrée de la fourchette, viendrait heurter le dos des cornes et la montre s'arrêterait. Ce défaut se nomme le « renversement »; pour l'empêcher, on a ajouté à l'échappement un dispositif très simple, consistant en un disque circulaire K ajusté sur l'axe du balancier et un « dard » *mn* fixé à la fourchette. En cas de tendance au dégagement de l'ancre, le dard, venant s'appuyer contre le bord extérieur du disque, empêche la fourchette de passer d'un de ses points d'appui, ou paroi, à l'autre.

424. **Ebat de plateau.** — Dans l'état ordinaire de l'échappement, la fourchette étant maintenue appuyée contre une des parois d'arrêt, le dard ne doit pas toucher la circonférence extérieure du disque de sûreté. L'angle que la fourchette aurait à parcourir depuis la paroi jusqu'à l'instant du contact du dard et du plateau, se nomme « ébat de plateau ». Cet angle doit évidemment être inférieur à la somme des angles de chemin perdu et de repos, afin que la dent ne puisse jamais quitter le plan de repos pendant que le balancier accomplit son arc d'oscillation supplémentaire.

425. **Ebat de cornes.** — Pour permettre à la fourchette de passer librement d'une paroi à l'autre pendant les périodes

du dégagement et de l'impulsion, on pratique une gorge MN au petit plateau vis-à-vis de la position de la cheville P. Ce passage libre aurait pour effet de permettre à la fourchette de se renverser si un choc extérieur survenait pendant l'instant du dégagement, ou avant que la cheville eût pénétré suffisamment dans l'entrée de la fourchette, ou encore avant que le bord extérieur du plateau pût s'opposer au retour de la fourchette après l'impulsion. Pour parer à cette éventualité, on a muni la fourchette de cornes, dont le but est de remplacer momentanément l'ébat de plateau pendant le passage de la gorge MN devant le dard. L'ébat de cornes, analogue à l'ébat de plateau, est l'angle que peut décrire la fourchette depuis sa position d'arrêt jusqu'à l'instant où le devant des cornes vient s'appliquer contre la cheville de plateau. La valeur de cet angle se détermine d'après les mêmes considérations que pour l'ébat de plateau.

FONCTIONNEMENT DE L'ÉCHAPPEMENT A ANCRE

426. Supposons le balancier au commencement de son oscillation, c'est-à-dire écarté de sa position de repos d'un angle égal à la demi-amplitude de l'oscillation. Si, de cette position, on le laisse libre, il parcourt en premier lieu l'arc d'oscillation supplémentaire, pendant lequel il demeure hors de contact avec l'échappement. Durant ce parcours, le spiral agit sur le balancier en augmentant continuellement sa vitesse jusqu'à l'instant où la cheville de plateau rencontre la fourchette. Il se produit alors un choc qui a pour effet de mettre instantanément la fourchette et l'ancre en mouvement. Ce choc fait en outre perdre au balancier une partie de sa vitesse ; la cheville de plateau entraîne la fourchette avec l'ancre, et le mouvement du plan de repos fait reculer la roue jusqu'à ce que l'arête formée par l'intersection des plans de repos et d'impulsion vienne coïncider avec la pointe de la dent. En cet instant, la roue, animée d'un mouvement à gauche, persévère dans ce mouvement rétrograde pendant un très petit

angle, en vertu de sa vitesse acquise. Pendant ce temps, l'ancre continue à être entraînée par le balancier; il existe donc un instant pendant lequel la roue n'est plus en contact avec l'ancre. Le mouvement en arrière de la roue est cependant bientôt détruit par l'action de la force motrice, qui, agissant alors, communique à la roue un mouvement à droite; sa vitesse s'accélérant rapidement, le plan d'impulsion de la dent vient rencontrer celui de l'ancre. Il se produit alors un nouveau choc, qui a pour effet d'augmenter la vitesse de l'ancre. Comme la fourchette et la cheville avaient un mouvement commun, l'accélération de vitesse de l'ancre fait cesser le contact qui existait entre la cheville et le côté de l'entrée qu'elle conduisait, et le côté opposé de cette entrée vient heurter la cheville en produisant à son tour un choc qui augmente la vitesse du balancier. Tout est ainsi préparé pour l'impulsion : le plan de la roue agit contre celui de l'ancre et simultanément la fourchette agit sur la cheville en accélérant progressivement la vitesse du balancier jusqu'à ce que la surface d'impulsion de la dent quitte celle de l'ancre. La roue parcourt alors l'angle de chute et une de ses dents tombe sur le plan de repos de l'autre levier. Le balancier continue son mouvement jusqu'à ce que le spiral, qui agit en sens contraire pendant la demi-oscillation ascendante, et les diverses résistances passives aient détruit le mouvement. Les mêmes fonctions se reproduisent identiquement en sens opposé et ainsi de suite.

427. On peut donc diviser le fonctionnement de l'échappement à ancre en deux actions que nous examinerons séparément : d'abord l'action de la roue sur l'ancre, puis celle de la fourchette sur la cheville de plateau.

428. **Action de la roue sur l'ancre.** — Sauf pendant l'instant très court qui succède immédiatement au recul de la roue pendant le dégagement et pendant la période de chute, la roue reste constamment en contact avec l'ancre. Ce contact a lieu, par le fait, pendant les périodes de repos, de dégagement et d'impulsion. Parmi ces diverses fonctions, celle de

l'impulsion est celle qui offre le plus de variété dans la construction.

429. Comme il a été dit, l'impulsion de la roue à l'ancre s'effectue par l'intermédiaire de plans inclinés; ces plans sont mobiles autour des centres respectifs des deux organes et leur direction reste tangente à des circonférences concentriques aux deux axes.

Il est facile de se rendre compte qu'il existe trois manières de disposer les plans inclinés en les répartissant sur la roue et sur l'ancre :

1° le plan incliné se trouve entièrement à l'ancre et les dents de la roue ont une forme pointue;

2° le plan incliné se trouve reporté sur les dents de la roue et les levées de l'ancre se réduisent à deux fines chevilles;

3° le plan incliné se trouve partie à la roue et partie à l'ancre.

430. La disposition qui attribue la totalité du plan d'impulsion à l'ancre, semble être la plus ancienne; ce système se rencontre le plus généralement dans les montres anglaises. De là le nom, sous lequel il est souvent désigné, d'*échappement à ancre anglais* (planches 3 et 4).

Cette construction a un côté désavantageux : la forme des dents de la roue (fig. 117) oblige d'exécuter l'ancre de façon que les chutes soient suffisantes pour que les levées puissent passer en complète liberté derrière le dos de la dent qui vient d'échapper. Pour cette raison, les chutes deviennent plus grandes que dans le système à levées partagées. Cette circonstance est fâcheuse, car elle cause une perte de force assez importante; si, par exemple, la roue parcourt 12° pendant une oscillation du balancier et que, sur ces douze degrés, deux soient consacrés à la chute, la sixième partie de la force est ainsi dépensée en pure perte.

Un avantage de l'échappement à dents pointues est qu'en « frisant » les dents de la roue celle-ci devient très ronde de circonférence; on a ainsi la facilité de leur donner moins de repos s'il y a lieu, ce qu'on ne peut faire avec les dents à « talon ».

431. L'échappement à ancre avec le plan d'impulsion porté par les dents de la roue est d'une construction très simple. Il est employé dans quelques genres de montres de poche et dans certains systèmes de réveils. On le connaît sous le nom d'*échappement à chevilles* (planche 7). Ses principaux inconvénients sont la ténuité des chevilles de l'ancre, généralement en acier, la grandeur et l'inégalité des chutes et la difficulté de maintenir l'huile aux points de contact. On a essayé dans quelques systèmes de garnir l'ancre de chevilles en pierre, mais sans grands résultats pratiques.

432. L'échappement à ancre avec plan d'impulsion partagé entre la dent et les leviers de l'ancre est celui des trois genres qui est le plus fréquemment employé. On le nomme souvent *échappement à ancre suisse*, ou mieux encore *échappement à levées partagées*. Il a l'avantage d'une plus grande économie de force motrice, car les chutes peuvent y être très amoindries (planches 5 et 6). Les roues sont aussi moins délicates que celles à dents pointues.

433. **Action de la fourchette sur la cheville de plateau.** — La qualité caractéristique de cette partie de l'échappement consiste en ce que la fourchette et la cheville n'entrent en contact que pendant les périodes du dégagement et de l'impulsion; pendant l'arc d'oscillation supplémentaire le balancier demeure isolé de l'échappement, ce qui donne à ce mécanisme tous les avantages d'un *échappement libre*.

La combinaison mécanique d'un levier, tel que la fourchette, agissant sur un autre levier dont le centre de mouvement est l'axe du balancier et dont l'extrémité est formée par la cheville de plateau, ne peut donner lieu à d'importantes variations dans sa construction. Les principales différences ne résident en effet que dans la forme et la disposition de la cheville, ou encore dans l'arrangement des organes du renversement.

434. L'échappement à *double plateau* est disposé comme celui que nous avons décrit (423); un petit plateau K (fig. 119) est ajusté sur l'axe au-dessous du grand plateau qui porte la

cheville; le dard *mn* est fixé à la fourchette parallèlement à celle-ci.

435. L'échappement à *simple plateau* n'a qu'un seul disque cumulant les deux fonctions de supporter la cheville et de faire obstacle au renversement prématuré de la fourchette. Une gorge pratiquée sur ce disque, en regard de la cheville, donne passage au dard comme dans le cas précédent (planche 9).

Dans quelques genres de montres, principalement dans des pièces anglaises ou américaines, le dard est formé par une goupille de laiton fixée très près du fond de l'entrée de la fourchette et perpendiculairement au plan de cette dernière. Dans d'autres genres, ce dard est formé par un coin saillant limé à l'extrémité de la fourchette.

436. Pendant les périodes immédiates qui précèdent le contact de la cheville et de la fourchette ou qui lui succèdent, le dard et le plateau double ou simple pourraient manquer leur but si le contact éventuel des cornes avec la cheville ne venait remplacer cette fonction. Ces appendices doivent être assez longs pour que la sûreté soit continue entre celle que donne le dard et celle que comportent les cornes. Pour éviter des arcboutements résultant de quelque défaut de construction, on donne aux cornes une forme telle que l'espace compris entre la cheville et les cornes augmente progressivement jusqu'à leur extrémité. La forme qui convient, est donc celle d'une spirale d'Archimède.

Ajoutons encore que la circonférence extérieure du plateau doit être parfaitement concentrique à l'axe et bien polie, afin de réduire au minimum le frottement résultant du contact accidentel du dard.

437. La forme de la *cheville de plateau* est exécutée de diverses façons; il importe de donner à cette pièce un profil permettant de réduire autant que possible les pertes de force pendant la transmission.

Dans quelques anciennes constructions on rencontre une cheville cylindrique; il est facile de reconnaître que cette forme est défavorable, la transmission de la force étant sou-

mise à une perte accentuée aussi bien au dégagement qu'à la fin de la levée.

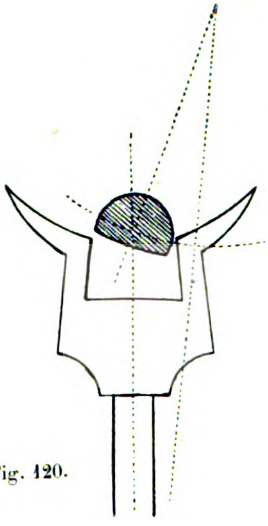


Fig. 120.

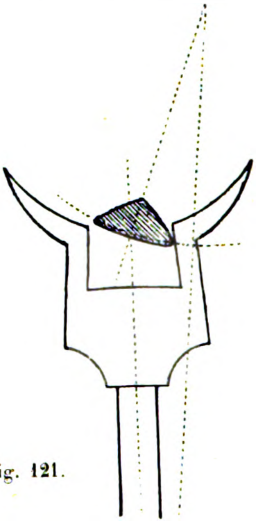


Fig. 121.

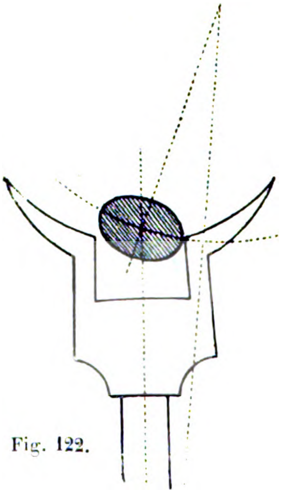


Fig. 122.

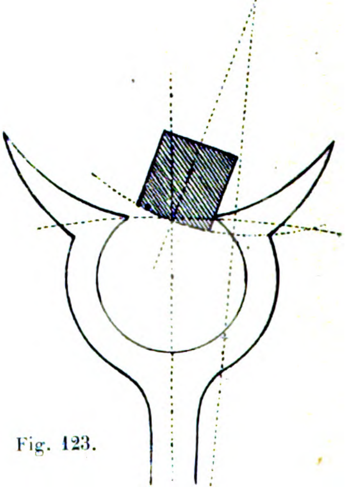


Fig. 123.

Dans un assez grand nombre de montres suisses, on emploie une cheville de forme elliptique (fig. 122). Les formes les plus avantageuses sont cependant la demi-cylindrique (fig. 120) et le triangulaire (fig. 121). La forme carrée

(fig. 123) ou rectangulaire est moins fréquente. Nous parlerons plus loin du système à double cheville, qui donne aussi d'excellents résultats pratiques.

438. Si nous comparons maintenant les systèmes à double et à simple plateau, il est facile de se rendre compte des avantages du premier sur le second :

1° la pénétration de la circonférence décrite par la pointe du dard dans celle du plateau est plus grande dans le petit que dans le grand;

2° pour que cette pénétration soit suffisante dans le simple plateau, il faut que l'angle de levée du balancier ne soit pas trop petit[1];

3° le contact du dard avec le bord du plateau produit plus facilement un arcboutement avec le simple plateau qu'avec le petit; les oscillations du balancier qui le subissent, en seront donc plus influencées avec un simple qu'avec un double plateau.

Ces considérations suffisent pour faire préférer l'échappement à double plateau à celui avec simple plateau.

439. **Combinaison des deux actions.** — L'action de la roue sur l'ancre et celle de la fourchette sur le plateau pouvant être examinées indépendamment l'une de l'autre, il en résulte que chaque construction de roue et d'ancre peut être employée avec chaque système de fourchette pour former un échappement à ancre complet. On peut donc en exécuter une assez grande variété.

Les positions relatives des trois centres de mouvement peuvent varier dans certaines limites et être placées ou sur une même ligne droite ou suivant deux droites formant entre elles un angle quelconque, qui se rapproche souvent d'un angle droit. Ces dispositions portent, dans la fabrication, le nom d'échappement en *ligne droite* et d'échappement à ancre *de côté*.

[1] Nous verrons plus loin que les grands angles de levée produisent dans l'échappement à ancre le défaut qu'on a appelé « arrêt au doigt ».

TRACÉS DE L'ÉCHAPPEMENT A ANCRE

440. Le tracé géométrique de l'échappement à ancre permet d'établir les proportions des organes de cette construction. Avant d'entrer dans les détails du dessin, envisageons la question à un point de vue général.

441. En premier lieu, il convient d'établir une distinction dans la position qu'occuperont les points de repos des leviers par rapport au centre de l'ancre. Ces points peuvent être à égale distance du centre ou placés de telle façon que le milieu des leviers soit à égale distance de ce même centre. Dans le premier cas, l'ancre a ses deux bras de longueur inégale et, dans le second, ils sont à peu près de même longueur; dans le premier cas, pour une même valeur des angles de repos et de tirage, la difficulté du dégagement reste la même, tandis que dans le second cette résistance sera différente sur l'un et sur l'autre leviers. La différence dans la position des points de repos par rapport au centre de l'ancre nous conduit ainsi à distinguer :

1° l'ancre à repos équidistants;

2° l'ancre à leviers équidistants.

La circonstance que, dans l'échappement à dents pointues, les plans inclinés des leviers sont plus longs que dans l'échappement à levées partagées, a conduit à préférer l'ancre à leviers équidistants pour la première de ces constructions; dans la seconde les deux dispositions se rencontrent indifféremment.

442. Le nombre de dents embrassées par l'ancre, c'est-à-dire l'angle compris entre les deux rayons de la roue aboutissant aux points de repos sur la circonférence décrite par la pointe des dents, est généralement de $2 \frac{1}{2}$ pour une roue de 15 dents. L'intervalle angulaire qui sépare deux dents consécutives est dans ce cas de

$$\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ;$$

par suite

$$2{,}5 \times 24^\circ = 60^\circ.$$

Si la roue a un nombre de dents différent, 18 par exemple, on aura

$$\frac{360^\circ}{18} = 20^\circ;$$

en admettant 3 dents et $^1/_2$ embrassées par l'ancre, l'espace angulaire compris entre les droites joignant les points de repos sur la circonférence et le centre de la roue sera

$$3{,}5 \times 20^\circ = 70^\circ.$$

Il n'est pas avantageux, pour les échappements des montres de poche, d'augmenter cet angle au-dessus de cette limite, car la longueur des bras de l'ancre augmente ainsi que celle des inclinés et le moment d'inertie de la pièce devient trop grand. Il conviendrait dans ces cas de diminuer les angles de levée et de repos de l'ancre.

143. La position naturelle du centre de l'ancre est sur une droite tangente à la roue au point de repos. Ce centre devra donc se trouver au point de rencontre des deux droites AO′ et BO′ perpendiculaires aux rayons de la roue OA et OB passant par les points de repos (fig. 124).

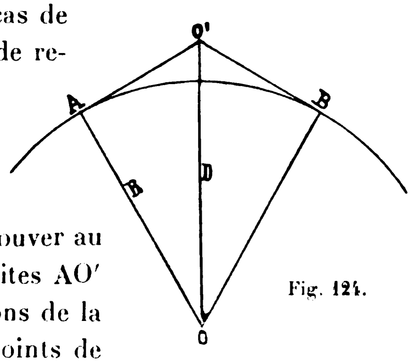


Fig. 124.

Si le rayon R de la roue est connu, on peut déterminer la distance des centres D au moyen de la formule

$$D = \frac{R}{\cos. 30^\circ}.$$

Si, par exemple, on veut représenter un échappement à ancre dont la roue a 150 mm de rayon, on aura :

$$D = \frac{150}{\cos. 30^\circ}.$$

Le calcul donne :

$$\log : 150 = 2{,}17609$$
$$-\log : \cos. 30^\circ = \underline{9{,}93753} - 10$$
$$2{,}23856. \text{ Nombre corresp. : } 173{,}2.$$
$$D = 173{,}2 \text{ mm.}$$

On peut aussi avoir comme donnée la distance des centres et rechercher le rayon R de la roue. Dans ce cas, du point O on porte deux angles AOO′ et BOO′ de 30° chacun ; du point O′ on abaisse des perpendiculaires sur chacun des côtés AO et BO, et la distance du centre de la roue au pied de ces perpendiculaires donne le rayon cherché.

On peut calculer cette valeur au moyen de la formule

$$R = D. \cos. 30^\circ.$$

Si D = 200 mm, on aura

$$\log : D = 2{,}30103$$
$$+ \log : \cos. 30^\circ = \underline{9{,}93753} - 10$$
$$2{,}23856. \text{ Nombre corresp. } 173{,}2.$$
$$R = 173{,}2 \text{ mm.}$$

444. L'angle de levée de l'ancre varie pratiquement entre 8 et 12°. Pour nos tracés nous adopterons sa valeur moyenne de 10°. Dans cette valeur est comprise celle de l'angle de repos, que nous admettrons égale à 1° ou 1° et demi.

145. L'angle parcouru par la roue pendant une oscillation du balancier est égal à la moitié de la distance qui sépare deux dents consécutives. Pour une roue de 15 dents nous avons

$$\frac{360^\circ}{2 \times 15} = 12^\circ,$$

et pour une roue de 18 dents

$$\frac{360^\circ}{2 \times 18} = 10^\circ.$$

La chute est comprise dans cet angle ; nous la compterons de 2° dans le tracé de l'échappement à dents pointues et de 1° dans celui de l'échappement à levées partagées. Pour une

roue de 15 dents, il restera donc, suivant le cas, 10 ou 11 degrés pour l'angle parcouru par la roue pendant une impulsion.

446. 1° **Tracé de l'échappement à dents pointues.** — Supposons connu le rayon R de la roue. Du point O comme centre on décrit une circonférence de ce rayon (planches 3 et 4) et l'on rapporte un angle au centre de 60° (442). Par les points où les côtés de cet angle coupent la circonférence, on élève des perpendiculaires sur ces côtés. L'intersection de ces perpendiculaires BO′ et CO′ donne le centre de l'ancre O′.

Portons ensuite les angles parcourus par la roue. De la droite BO (planche 3) et du point O comme sommet, indiquons l'angle BOA de 10° et un même angle COD à partir de la droite CO. En convenant de représenter la dent au repos sur le levier d'entrée, nous pourrons en même temps indiquer l'angle de chute DOE (2°), ce qui donnera pour la roue le parcours obligé de 12° pendant une oscillation du balancier.

Dans le cas du tracé de l'échappement à leviers équidistants (planche 4), la seule différence réside dans le fait du partage de l'angle de 10° en deux parties distribuées également de part et d'autre des droites BO et CO.

On représente ensuite les angles de repos, de tirage et de levée de l'ancre. Joignons pour cet effet les points B′ et C′ au centre O′ (planche 4) par des droites (sur la planche 3 les droites BO′ et CO′ existent déjà) et portons les angles de repos BO′L (planche 3), B′O′L (planche 4). Elevons ensuite une perpendiculaire au point B (ou B′) sur la droite BO′ (ou B′O′) et, à partir de cette droite et du point B (ou B′) comme sommet, portons l'angle de tirage FBG (ou FB′G) de 15°. Le côté GB prolongé jusqu'à la rencontre de la droite O′L détermine le point L, projection horizontale de l'arête perpendiculaire formée par l'intersection des plans de repos et d'impulsion du levier d'entrée. On joint ensuite le point A au centre O′ par une ligne droite à partir de laquelle, de O′ comme sommet, on porte l'angle AO′P de 10°. Le point de rencontre de l'arc AP, décrit du point O′ comme centre, avec

la droite O′P, détermine le point P, que l'on joint à L pour former la projection horizontale du plan d'impulsion du levier d'entrée de l'ancre. On mène ensuite la droite PX, parallèle ou légèrement inclinée sur LG.

Le levier de sortie s'obtient en portant l'angle d'impulsion CO′N (ou C′O′N) de 9° à la suite duquel on ajoute l'angle de repos MO′N′ de 1°. On décrit du point O′ l'arc CR (ou C′R) et, au point R, on élève la perpendiculaire RH sur la droite O′M; à partir de cette droite, avec R comme sommet, on porte l'angle de tirage HRK, dont le côté RK est prolongé jusqu'à sa rencontre avec O′N au point S. En joignant S à D, on obtient la projection du plan incliné du levier de sortie aussi bien en longueur qu'en direction.

La roue se trace aisément; le flanc de la dent BV forme avec le rayon OB un angle d'au moins 24°. Ayant indiqué cet angle, on divise en trois parties égales l'arc BE et chacune des divisions donne l'intervalle entre deux pointes de dents consécutives, puisqu'on a

$$\frac{72^\circ}{3} = 24^\circ = \frac{360^\circ}{15}.$$

Le reste du tracé de l'ancre et de la roue n'a d'autres conditions à remplir que la légèreté des pièces et l'élégance des formes.

147. 2° **Tracé de l'échappement à levées partagées.** — Etant donné le rayon R de la roue, on détermine la distance des centres de la même manière que précédemment. Nous admettrons ici une chute de 1° et obtiendrons ainsi pour une roue de 15 dents un parcours angulaire de

$$12^\circ - 1^\circ = 11^\circ$$

pendant une impulsion.

Les planches 5 et 6 représentent ce système, la première pour l'ancre à repos équidistants et la seconde pour l'ancre à leviers équidistants. L'angle de 11° est porté à droite des points de repos B et C dans le premier cas (puisque la roue tourne de gauche à droite); il est divisé en parties égales à

gauche et à droite des rayons OA et OD dans le second cas (planche 6).

Sauf cette différence, analogue du reste à celle que nous avons rencontrée dans la construction de l'ancre avec roue à dents pointues, le tracé des deux cas est semblable et nous ne décrirons que le premier (repos équidistants).

Après avoir indiqué les angles BOA et COD de 11°, on reporte les angles CO'N de 9° et NO'M de 1°. Du point O' comme centre, on décrit l'arc de cercle CS et on élève la perpendiculaire SH sur la droite O'M. A partir de cette perpendiculaire et avec le point S comme sommet, on porte l'angle HSK de 15° (tirage) et on prolonge le côté KS jusqu'au point I, rencontre des droites KS et O'N. On joint ensuite par une droite les points I et D. Jusqu'ici, le tracé est analogue à celui de l'échappement à dents pointues, le plan incliné ID pouvant être en effet complètement porté par l'ancre.

Dans le cas présent, ce plan doit être partagé entre l'ancre et la roue. Ce partage peut se faire d'une manière plus ou moins arbitraire, c'est-à-dire que l'on peut affecter la moitié de l'incliné aux dents de la roue et l'autre moitié aux leviers de l'ancre, ou un tiers à la roue et deux tiers à l'ancre, etc.

Nous adopterons ici le partage donnant les $^2/_5$ du plan à la dent et les $^3/_5$ au levier. En conséquence nous diviserons la droite ID en cinq parties égales et, du point O comme centre, nous ferons passer une circonférence par le point V, deuxième division à partir de D. Cette circonférence donnera la dimension totale de la roue et la droite DV le plan incliné de la dent en grandeur et en direction. Par le point V on mène une droite parallèle à KI et l'on a ainsi le levier de sortie.

Pour obtenir le levier d'entrée, on reporte du point A l'incliné de la dent; par le point U on décrit du centre O' un arc de cercle; on joint U à O' par une droite à partir de laquelle, avec O' comme sommet, on reporte l'angle UO'X de 10° (levée totale de l'ancre). De la droite BO' on porte l'angle BO'L de repos 1°. On mène FB perpendiculaire à O'B et

l'angle de tirage FBG de 15°. Le côté GB prolongé jusqu'en L donne un point que nous relierons à J par une droite JL; cette droite sera la projection du plan d'impulsion du levier d'entrée de l'ancre. Par le point J on mène ensuite une parallèle à GL et l'on aura ainsi la représentation du levier d'entrée. On indique la dent au repos et l'on termine le tracé comme dans le cas précédent. On admet également un angle de 24° comme inclinaison du devant de la dent sur le rayon de la roue aboutissant à la pointe B de cette dent.

Les planches 5 et 6 représentent l'ancre dans ses deux positions extrêmes, ce qui est facile à obtenir sur le dessin.

Remarquons que, pour le tracé de l'échappement à leviers équidistants, on doit joindre les points de repos B et C (planche 6) au centre O′ de l'ancre et que c'est à partir de la droite CO′ qu'il faut porter l'angle CO′*n* d'impulsion de l'ancre. De même, pour le levier d'entrée, on reporte à partir de la droite BO′ l'angle de repos MO′N de l'ancre.

448. **Tracé de l'échappement à chevilles.** — Dans ce système, le plan incliné se trouve entièrement reporté sur la dent de la roue (431). Pour simplifier la fabrication, on construit généralement l'ancre avec les chevilles placées à égale distance du centre; cette méthode présente néanmoins l'inconvénient de produire des chutes inégales, ce dont on se rend facilement compte par le dessin (planche 7). Admettons pour notre tracé une roue de 18 dents et le nombre de dents embrassées par l'ancre de $3\frac{1}{2}$. Nous aurons par suite

$$\frac{360^\circ}{18} \times 3,5 = 70^\circ.$$

De chaque côté de la ligne des centres on porte ainsi un angle de 35°. Soit donné encore le rayon de la roue aboutissant au commencement de la dent, R = 150 mm. Des points A et B on élève des perpendiculaires O′A et O′B aux côtés OA et OB de l'angle de 70°; on obtient ainsi le centre O′ de l'ancre. Le diamètre des chevilles, suffisant pour la pratique, peut être compris dans un angle au centre de la roue de $2^\circ\frac{1}{2}$ et l'on détermine la position du centre de la cheville

d'entrée par l'angle de repos AO'D de $1^{\circ}\,^1/_2$; l'intersection du côté O'D avec la droite OA donne ce point D.

La cheville se trouvant ainsi dans sa position de repos, on mène la droite O'C tàngente à sa circonférence et, à partir de cette droite, l'angle de levée totale de l'ancre $CO'M = 10^{\circ}$. L'intersection de la droite O'M avec l'arc décrit autour du point O' par le centre D de la cheville donne le point par lequel devra passer la circonférence extérieure des dents de la roue. L'angle parcouru par la roue à chaque oscillation du balancier est égal à $\frac{20^{\circ}}{2} = 10^{\circ}$; en admettant 1° de chute nominale, la droite OE, écartée de 9° de Oa, déterminera le point E de la dent par son intersection avec la circonférence extérieure de la roue. (On peut constater que la chute effective est plus considérable, puisqu'elle est composée de cet angle de 1° augmenté de l'angle que comprend la demi-largeur de la cheville[1].) Le devant de la dent, autrement dit son plan de repos, forme un angle d'environ 16° avec la rayon de la roue; on mène le côté bH de cet angle de façon à le rendre tangent à la cheville et l'on joint par une droite le point E au point de rencontre du prolongement de ce côté avec la circonférence extérieure de la roue. On obtient ainsi le plan d'impulsion de la dent. La face de revers des dents est inclinée de façon à concilier les deux conditions de légèreté de la roue et solidité des dents.

La position F de la cheville de sortie se déterminera facilement au moyen de l'arc de cercle BF et en plaçant la cheville tangente à la circonférence extérieure de la roue.

449. **Tracé de l'échappement à ancre Graham.** — Ce tracé, au point de vue logique, devrait être présenté avec ceux des échappements à repos frottants, auxquels il appartient ; mais sa grande analogie avec les systèmes que nous étudions, nous autorise à l'admettre ici.

[1] Cet angle n'est pas égal des deux côtés, puisqu'à la levée d'entrée la cheville se rapproche de la dent et qu'elle s'en éloigne au contraire à la levée de sortie, d'où la différence de la valeur effective des chutes dans ce système.

Dans une pendule à secondes, le nombre de dents de la roue d'échappement est généralement de 30 (155) et l'ancre embrasse le plus souvent 7 dents $^1/_2$, soit

$$\frac{360°}{30} \times 7{,}5 = 90°.$$

Ici, comme dans les cas précédents, on peut construire l'ancre avec repos ou avec leviers équidistants. Envisageons le cas, le plus fréquent, des leviers équidistants.

Soit (planche 8) le rayon de la roue égal à 135 mm. De chaque côté de la ligne des centres, reportons un angle de 45° et déterminons le centre de l'ancre comme dans les cas précédents. La roue avançant à chaque oscillation d'un angle de $\frac{360}{2 \times 30} = 6°$, retranchons de cette valeur une chute de 1° et, de chaque côté des droites OA et OB, reportons des angles de $2°\,^1/_2$. Indiquons également l'angle de chute FOK.

L'angle de levée du pendule est assez fréquemment égal à 2°, comprenant $1°\,^1/_2$ d'impulsion et $^1/_2°$ de repos. Joignons donc le point de repos C au centre de l'ancre et, de la droite O'C, portons l'angle de repos CO'H. De la droite O'D portons encore l'angle DO'I de 2° et, du centre de l'ancre, décrivons des arcs de cercle passant par les points C et D. Joignant par une droite les intersections H et I de ces arcs et des droites O'H et O'I, on obtiendra le plan d'impulsion du levier de sortie en grandeur et en direction. Le levier d'entrée se détermine d'une manière très simple en joignant le point E au centre de l'ancre et en portant de la droite O'E l'angle GO'E de $1°\,^1/_2$; l'intersection de la droite O'G et de l'arc de cercle passant par le point E détermine un point de la projection du plan d'impulsion du levier; l'autre point est nécessairement en F. — L'incliné du plan de repos de la dent n'a pas d'autre condition à remplir que de laisser libre passage aux coins des leviers pendant le parcours des arcs supplémentaires. Un angle de 12° formé par ce plan et le rayon peut être considéré comme un minimum.

450. **Tracé de la fourchette et des plateaux.** — Soient O et O′ (planche 9) les centres du balancier et de l'ancre. Portons, à partir de la droite OO′, deux angles : l'un, du centre O′, égal à la moitié de l'angle de levée de l'ancre, soit $\frac{10^\circ}{2} = 5^\circ$, l'autre du centre O et égal à la moitié de l'angle de levée du balancier. Par le point d'intersection *p* des côtés de ces angles, et du point O comme centre, faisons passer une circonférence. On représente alors la forme que l'on veut donner à la cheville de plateau (437) symétriquement par rapport à la droite O*p*. Dans les deux tracés figurés, nous avons admis une cheville demi-cylindrique pour le système à double plateau et une cheville elliptique pour celui à simple plateau. Dans le premier cas, le centre de la circonférence de la cheville se trouve au point *p* ; dans le second, ce point est situé au centre de figure de cette pièce. Les dimensions de la cheville se déterminent en tenant compte d'une solidité suffisante pour cette pierre[1]. Pratiquement, on peut admettre une largeur de 0,5 mm comme suffisante pour l'échappement d'une montre de 43 mm (19 lignes), dont la distance du centre de l'ancre à celui du balancier est d'environ 6 mm. On construit ensuite l'entrée de la fourchette en prenant soin de donner aux côtés de contact une direction légèrement concourante vers l'extrémité libre de cette pièce. En pratique cette forme est connue sous le nom de « queue d'aigle » ; elle permet d'éviter un excès de chute au commencement de l'impulsion, mais ne doit pas être exagérée. Il nous reste encore à déterminer la longueur des côtés de l'entrée et la forme des cornes de la fourchette.

La longueur de l'entrée se détermine par la course de la partie extérieure de la cheville de plateau, afin que celle-ci puisse passer à une distance minimum de deux ébats de pivots de l'extrémité de l'entrée. Dans le cas le plus défavorable, c'est-

[1] Remarquons qu'une grande cheville opère le dégagement plus facilement, puisqu'il s'effectue plus près de la ligne des centres, mais que, par contre, le commencement de l'impulsion se produit plus loin de cette ligne qu'avec une chèville mince.

à-dire lorsque les deux mobiles se trouvent poussés l'un vers l'autre, ils se rapprochent chacun d'un demi-ébat de pivot; on aura ainsi encore un ébat de sûreté. Nous pouvons admettre un ébat de pivot égal à 0,0125 mm, donc

$$2 \text{ ébats} = 2 \times 0{,}0125 = 0{,}025 \text{ mm}.$$

Si, par exemple, nous avons pour une montre de 43 mm une distance du centre de l'ancre à celui du balancier égale à 6 mm, reportée à 200 mm sur le dessin, nous aurons dans ce cas un agrandissement de

$$\frac{200}{6} = 33\,{}^1/_3$$

fois la grandeur naturelle. La distance linéaire entre l'extrémité de l'entrée et le point le plus extérieur de la cheville de plateau devra donc être de

$$33{,}33\ldots \times 0{,}025 = 0{,}833\ldots$$

ou $^4/_5$ de millimètre en chiffre rond.

Pour déterminer la forme extérieure des cornes, nous remarquons qu'elles doivent s'écarter graduellement de la circonférence décrite par le point le plus extérieur de la cheville de plateau, sans que cependant l'ébat des cornes puisse devenir supérieur à la somme des angles de repos et de chemin perdu. La forme exacte répondant à cette donnée serait par le fait un arc de spirale d'Archimède, que l'on peut remplacer par un arc de cercle de rayon légèrement supérieur à celui de la circonférence décrite par le point le plus extérieur de la cheville de plateau et dont le centre serait déplacé de O en O_1 et symétriquement de l'autre côté[1].

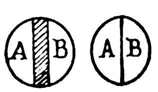


Fig. 125.

La longueur des cornes doit être telle que l'ébat de cornes

[1] Pour l'exécution pratique de la forme des cornes, un excellent moyen est d'employer un bout d'acier rond, d'en supprimer une tranche au centre (partie hachée, fig. 125) et de rapprocher ensuite les deux segments A et B. En employant cet instrument pour l'adoucissage et le polissage final des cornes, on obtient la forme voulue.

puisse se produire avec une sécurité suffisante quand l'ébat de plateau n'agit plus, c'est-à-dire pendant le passage du dard dans la circonférence du plateau qui supporte la cheville. Les deux figures de la planche 9 représentent cette cheville à l'instant où l'ébat de cornes doit succéder à l'ébat de plateau.

Dans le système avec double plateau, le diamètre du petit plateau peut être les trois cinquièmes du grand.

L'ébat de plateau, dans les dispositions à double ou à simple plateau, de même que l'ébat de cornes, doit être égal à un minimum de deux ébats de pivot.

TRANSMISSION DE LA FORCE DE LA ROUE A L'ANCRE

451. Dans l'étude des engrenages, nous avons examiné la transmission de la force par le rouage en déterminant la perte qu'elle subit par le fait du frottement des dentures et des pivots. Avant de poursuivre cette étude pour l'échappement, nous résumerons la question de la manière suivante.

En remontant une montre, la main déploie un certain travail mécanique, qui s'emmagasine dans le système moléculaire du ressort de barillet. A chaque oscillation du balancier, ce ressort rend une part de ce travail qui est transporté du barillet à l'échappement par l'intermédiaire du rouage. L'échappement transmet la force ainsi reçue au balancier. Cette transmission du travail ne peut s'effectuer sans subir une certaine perte par le frottement des pivots, des engrenages et des organes de l'échappement, par les chutes et les chocs, par l'inertie des mobiles, etc.

C'est incontestablement un des grands problèmes de l'horlogerie théorique que celui qui a pour but de suivre ainsi la force pendant sa transmission de l'organe qui la produit à celui qui l'utilise.

Nous avons établi les formules au moyen desquelles on peut facilement calculer, successivement pour chaque mobile, la valeur de la force qui lui est transmise en tenant compte des frottements (348, 362). Nous supposerons ainsi connue

la valeur du moment de cette force par rapport à l'axe de la roue d'échappement et nous nous proposerons maintenant de déterminer ce moment par rapport à l'axe de l'ancre.

452. **Détermination du moment de la force par rapport au centre de mouvement de l'ancre.** — Soit O le centre de la roue (fig. 126) et O' celui de l'ancre. — Envisageons en premier lieu le contact d'une dent avec le *levier de sortie* et soit *c* un point quelconque du contact. Admettant qu'à l'instant considéré les deux mobiles soient animés d'un mouvement uniforme, nous aurons l'égalité entre la somme algébrique des moments de force agissant sur la roue et la somme de ceux qui agissent sur l'ancre.

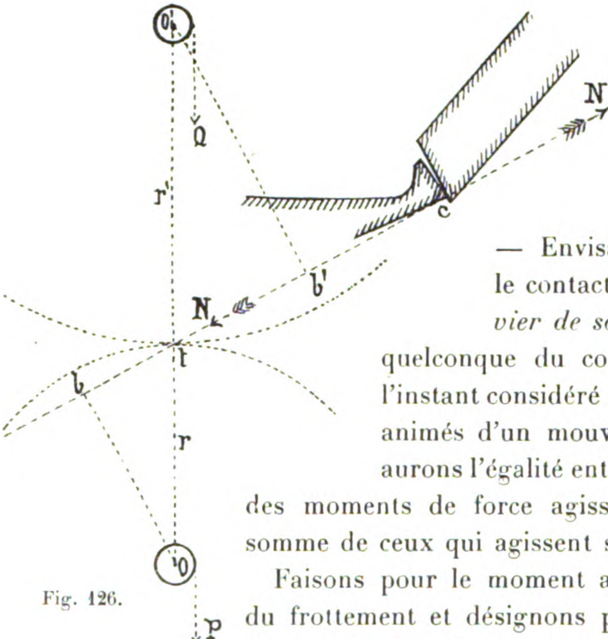


Fig. 126.

Faisons pour le moment abstraction de la force du frottement et désignons par P le moment de la force qui anime la roue et par Q le moment de celle qui, agissant sur l'ancre, oppose une résistance au mouvement de la première. La roue reçoit en conséquence au point de contact *c* une force normale N provenant de l'action de Q. La direction de cette force sera indiquée par la forme des surfaces en contact, puisqu'elle doit leur être normale : elle agit de *c* vers *b* et tend à faire tourner la roue en sens contraire de son mouvement. Par suite, si nous considérons P comme positif, N sera négatif et son moment sera exprimé par

$$- N.Ob.$$

On pourra donc poser

$$P - N.Ob = 0.$$

ou

$$P = N.Ob. \qquad (1)$$

Sur l'ancre agit d'abord la force dont le moment est Q, que nous considérons comme positif, puis la force normale N', égale à N à cause de l'équilibre considéré. Ces deux forces N et N', agissant en sens contraires, auront un même alignement. Le moment de N' sera

$$-N'.O'b'$$

et l'on aura la somme

$$Q - N'.O'b' = 0$$

ou

(2) $$Q = N'.O'b'.$$

Divisant (1) par (2), on obtiendra :

$$\frac{P}{Q} = \frac{N.Ob}{N'.O'b'} = \frac{Ob}{O'b'}.$$

Par suite de la similitude des deux triangles Obt et $O'b't$, on peut poser

$$\frac{Ob}{O'b'} = \frac{Ot}{O't}$$

et, en désignant les lignes Ot par r et $O't$ par r', il viendra

(3) $$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r'}$$

ou encore

(4) $$Q = P\frac{r'}{r}.$$

453. Si la valeur de P reste constante, Q ne change pas aussi longtemps que r et r' restent les mêmes, c'est-à-dire si le point t où la normale coupe la ligne des centres, ne se déplace pas.

Nous arrivons ainsi au principe fondamental de la théorie des engrenages, que nous avons énoncé en ces termes (210) : « Pour que la transmission de la force par les engrenages soit constante, il faut que les surfaces frottantes des dentures soient formées par des courbes telles qu'à un instant quelconque du mouvement la normale commune au point de contact passe toujours par un même point de la ligne des

centres, lequel est le point de tangence des circonférences primitives. »

Cette condition est-elle remplie, le mouvement de la roue et de l'ancre s'effectuera comme celui de deux cylindres de rayons r et r', tangents au point t et se conduisant l'un l'autre par simple adhérence.

454. Au levier de sortie, nous aurions ainsi un engrenage extérieur, puisque les deux mobiles tournent en sens contraires, tandis qu'au levier d'entrée l'engrenage serait intérieur, les deux mobiles tournant dans le même sens.

455. Nous savons que la condition rappelée ci-dessus (453) peut être remplie dans les engrenages par des courbes diverses; mais, ici, il entre une deuxième condition en ligne de compte, c'est-à-dire qu'une même forme de dent doit, pratiquement, pouvoir convenir aussi bien au levier de sortie qu'au levier d'entrée.

456. La réalisation d'une transmission uniforme de la force par l'échappement à ancre peut être obtenue simplement avec une roue à dents pointues, pour laquelle la projection horizontale du plan d'impulsion peut être considérée comme un point. On sait en effet qu'une normale à un point peut prendre toutes les directions. Une certaine chute est néanmoins toujours nécessaire; son minimum de 2°, pour une roue plate, entraîne donc nécessairement une perte de force de $^1/_6$ (418, 445).

On pourrait, il est vrai, combiner sur une roue plate une denture perpendiculaire à son plan, d'une manière analogue à celle de la roue d'un échappement à virgule, et, pour une étude théorique, envisager la projection de la pointe de la dent comme un point. Dans ce cas seulement la solution de la question pourrait être complète, mais l'application pratique de cette combinaison n'en demeurerait pas moins difficilement réalisable, pour des raisons faciles à se représenter.

457. **Tracé de l'échappement à dents pointues donnant une transmission uniforme de la force.** — La forme des surfaces de contact peut, d'après la théorie des engrenages, être obtenue

de diverses manières qui, toutes, conduisent au même résultat lorsque la forme de la dent est donnée, comme c'est ici le cas. Pour des conditions établies, l'une ou l'autre des méthodes que nous avons exposées (215 et suivants) peut être la plus simple à employer.

Pour le problème que nous nous proposons de traiter, la solution la plus simple réside dans l'application directe du principe suivant lequel le rapport des angles parcourus par les deux mobiles doit rester constant.

Admettons, comme précédemment, que l'angle de levée de l'ancre soit de 10°, dans lequel nous comprenons l'angle de repos de 1°. Nous obtenons ainsi 9° de levée ou d'impulsion parcourus par l'ancre pendant l'action de la roue. La roue de 15 dents parcourt à chaque oscillation du balancier un angle de 12°, duquel nous avons à retrancher une chute de 2°.

La roue parcourt donc 10° pendant que l'ancre en parcourt 9.

Si l'on voulait, dans les conditions ordinaires, restreindre la chute dans la plus petite mesure possible, on pourrait, avec l'échappement à repos équidistants (planche 3), faire la chute intérieure d'un demi-degré plus faible, pour la raison que l'arc de cercle décrit par l'extrémité du bras d'entrée pendant le parcours de l'angle de repos est plus court que celui que décrit l'extrémité du bras de sortie pour le même angle. La planche 10 ne tient pas compte de cette différence.

Devant faire en sorte que le rapport des angles parcourus reste constamment dans le rapport de 9 à 10, la roue devra donc parcourir 1° pendant que l'ancre décrira 0°,9, si la roue parcourt la moitié de 1°, l'ancre devra parcourir la moitié de 0°,9. Ce rapport doit exister quelque petits que soient les angles décrits.

Divisons l'angle de 10° parcouru par la roue en un certain nombre de parties égales, quatre par exemple (planche 10), et par chacun des points de division, que nous désignerons par les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, décrivons des arcs de cercle du

centre O′ de l'ancre. Divisons de même l'angle de 9° parcouru par l'ancre en quatre parties égales; de cette façon, chacune de ces parties vaudra $^{9}/_{4}{}^{\circ}$ ou $2^{\circ}\,^{1}/_{4}$.

Convenons de représenter le levier d'entrée avec la pointe de la dent appuyée sur le point de repos. Portons l'angle de repos de 1°. Joignons O′ à 1 par une droite et portons l'angle 1O1′ de $1^{\circ} + 2^{\circ}\,^{1}/_{4} = 3^{\circ}\,^{1}/_{4}$; joignons de même O′ à 2 et portons l'angle 2O′2′ de $1^{\circ} + 2 \times 2^{\circ}\,^{1}/_{4} = 5^{\circ}\,^{1}/_{2}$, puis l'angle 3O′3′ de $1^{\circ} + 3 \times 2^{\circ}\,^{1}/_{4} = 7^{\circ}\,^{3}/_{4}$, et enfin l'angle 4O′4′ de $1^{\circ} + 4 \times 2^{\circ}\,^{1}/_{4} = 10^{\circ}$.

Joignons les points 1′, 2′, 3′ 4′, résultant de l'intersection des côtés de ces angles par les arcs de cercle tracés depuis les points de division 1, 2, 3, 4, au moyen d'une courbe continue qui sera la projection de la surface d'impulsion du levier d'entrée de l'ancre; cette courbe aboutit au point O′, intersection du plan de repos et du côté O′0′ de l'angle de repos.

La courbe du levier de sortie s'obtient d'une manière analogue, ainsi que le fait voir la figure. Cette dernière forme aurait pu tout aussi bien être trouvée en faisant rouler la circonférence primitive de l'ancre sur celle de la roue. Le point 0′ aurait alors décrit la courbe 0′, 1′, 2′, 3′, 4′, qui est donc un arc d'épicycloïde. On pourrait avoir d'une manière analogue la courbe du levier d'entrée; seulement, à cause de la grandeur des circonférences primitives, les dimensions de cette construction dépasseraient celles d'une feuille de papier ordinaire, ce qui serait incommode.

458. Pour obtenir les rayons de ces circonférences primitives, connaissant le rayon R de la roue, il faut d'abord calculer la distance des centres D. On a (443)

$$D = \frac{R}{\cos 30^{\circ}}.$$

Si R = 150 mm, on aura

$$D = \frac{150}{\cos 30^{\circ}} = 173{,}2^{\text{mm}}.$$

Les formules (199) donneront ensuite (α et α' représentant les angles parcourus par la roue et par l'ancre) pour le levier de sortie :

$$r = D\,\frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} = 173{,}2\,\frac{9}{10 + 9} = 82{,}04^{mm},$$

$$r' = D\,\frac{\alpha}{\alpha + \alpha'} = 173{,}2\,\frac{10}{10 + 9} = 91{,}16^{mm},$$

et pour le levier d'entrée :

$$r = D\,\frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'} = 173{,}2\,\frac{9}{10 - 9} = 1558{,}8^{mm},$$

$$r' = D\,\frac{\alpha}{\alpha - \alpha'} = 173{,}2\,\frac{10}{10 - 9} = 1732^{mm}.$$

Pour le levier de sortie (engrenage extérieur), la somme des rayons primitifs est égale à la distance des centres, tandis que, pour le levier d'entrée (engrenage intérieur), la différence des deux rayons donne la distance des centres.

459. En menant par le point $0'$ (levier de sortie) une tangente à la courbe $0', 1', 2', 3', 4'$, cette tangente sera perpendiculaire à la droite $0't$, qui est donc normale à ce point (253). Si le point de contact de la dent et de l'ancre se trouve en un autre point quelconque, la normale en ce point passera toujours par le point t.

460. — En admettant que le moment P de la force qui agit sur la roue, soit 1 gr., nous obtiendrons le moment Q de la force par rapport à l'ancre au moyen de la formule (4) :

$$Q = P\,\frac{r'}{r} = 1 \times \frac{91{,}16}{82{,}04} = 1{,}111\ldots \text{ gr.},$$

valeur constante.

On obtiendrait évidemment le même résultat en remplaçant le rapport $\frac{r'}{r}$ par $\frac{\alpha}{\alpha'}$:

$$Q = P\,\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 \times \frac{10}{9} = 1{,}111\ldots \text{ gr.}$$

Ce moment Q reste donc le même du commencement à la fin de la levée et sa valeur est identique pour le levier d'entrée.

Ce fait ne se produit pas si l'on représente le plan d'im-

pulsion des leviers en ligne droite tel qu'il est dessiné planches 3 et 4, ce que nous allons démontrer.

461. **Détermination graphique des valeurs variables du moment de la force transmise de la roue à l'ancre dans le système à dents pointues avec plans d'impulsion droits.** — Reprenons le cas de l'échappement à repos équidistants, figuré planche 3, et soit toujours 1° de repos et 2° de chute.

Admettons, comme plus haut (460), que le moment de la force agissant sur la roue soit 1 gr.; nous obtiendrons le moment de la force par rapport à l'axe de l'ancre par la formule (452) :

$$Q = P \frac{r'}{r},$$

en mesurant sur le dessin (planche 11) les valeurs variables de r et de r'.

Au commencement de l'action sur le plan d'impulsion du levier de sortie, nous obtenons :

$$Q = 1 \times \frac{65}{91} = 0{,}714\ldots \text{ gr.},$$

et à la fin de cette action :

$$Q = 1 \times \frac{102}{54} = 1{,}87\ldots \text{ gr.}$$

Pour pouvoir mesurer les valeurs de r et de r' correspondant au levier d'entrée, un trop grand dessin serait nécessaire ; aussi nous servirons-nous de l'équation semblable :

$$Q = P \frac{O' b_1'}{O\, b_1},$$

dans laquelle les droites $O'b'_1$ et Ob_1 représentent les bras de leviers perpendiculaires aux pressions normales au commencement et à la fin de l'action. Nous savons, en effet, que le rapport de ces droites est égal à celui des rayons primitifs.

Nous aurons, au commencement du mouvement :

$$Q = 1 \times \frac{71{,}2}{53{,}8} = 1{,}32\ldots \text{ gr.},$$

et à la fin :

$$Q = 1 \times \frac{44,6}{51} = 0,87... \text{ gr.}$$

Le moment de la force Q est donc plus grand au commencement qu'à la fin de l'impulsion au levier d'entrée, tandis que le contraire a lieu lorsque l'action de la roue s'effectue sur le levier de sortie.

462. D'une manière analogue, il est possible d'analyser la transmission de la force dans tous les échappements et ceci sans calculs difficiles. Lors même que, avec un dessin, les résultats ne sont pas aussi exacts qu'avec le calcul mathématique, ils n'en seront pas moins très suffisants dans la plupart des cas.

463. **Transmission uniforme de la force dans l'échappement à levées partagées.** — D'une manière analogue à celle que nous venons de traiter, on pourrait constater la variation du moment de la force reçue par l'ancre dans le système à levées partagées (planches 5 et 6).

Proposons-nous de construire cet échappement de façon qu'il puisse remplir la condition d'une transmission uniforme de la force, en admettant comme courbe de contact la **développante de cercle** (226, 227).

Le rayon R de la roue aboutissant à la « pointe » de la dent (par opposition à son arrière-partie, que nous appellerons le « talon ») est choisi, dans ce tracé, de 135^{mm}. Nous obtiendrons ainsi une distance des centres :

$$D = 155.88^{mm}.$$

Avec 1° de repos et 1° de chute, la roue parcourra 11° pendant que l'ancre en parcourt 9. Les rayons primitifs r et r' des circonférences primitives pour le levier de sortie seront donc :

$$r = D \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} = 155,88 \frac{9}{11 + 9} = 70,15 \text{ mm.},$$

$$r' = D \frac{\alpha}{\alpha + \alpha'} = 155,88 \frac{11}{11 + 9} = 85,73 \text{ mm.},$$

et pour le levier d'entrée :

$$r = D \frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'} = 155,88 \frac{9}{11 - 9} = 701,46 \text{ mm.},$$

$$r' = D \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'} = 155,88 \frac{11}{11 - 9} = 857,34 \text{ mm.}$$

A cause de leurs grandes valeurs, ces deux derniers rayons ne sont pas portés sur le dessin.

Après avoir porté, comme dans les cas précédents, les angles de 30°, les angles de 11°, ainsi que les angles de 9° d'impulsion et de 1° de repos de l'ancre pour le levier de sortie (planche 12), on joint par une droite le point *c*, où commence la levée, au point de tangence *t* des circonférences primitives. Des centres O et O′ de la roue et de l'ancre, on abaisse sur cette droite des perpendiculaires O*b* et O′*b*′, et, avec ces droites comme rayons et des points O et O′ comme centres, on décrit des circonférences tangentes à la droite *ct*. Ces derniers cercles seront les cercles **développés** (226) et servent par le fait de bases à la construction des courbes de contact des dents et des leviers. A partir du point *c*, construisons la développante *cd* donnant la forme de la dent, puis reportons cette courbe au point B. Le point *e*, où cette courbe coupe la droite *cd*, est le dernier point de la courbe, car nous savons que dans l'engrenage à développantes de cercle le lieu des points de contact est toujours sur cette droite *et*. On peut encore faire décrire à cette forme l'angle de 1° de chute et la dent occupera ainsi sa position définitive, la dent d'entrée étant représentée au repos. La forme de contact du levier de sortie est également un arc de développante du cercle O′. Cette forme est malheureusement concave et sa courbure est plus prononcée que celle de la dent. Pour cette raison, le contact ne peut pratiquement s'effectuer où il devrait, et c'est là le côté défectueux de cette construction.

Il en est autrement pour le levier d'entrée, où cette forme se donne convexe. Elle est obtenue au moyen du même cercle développé. On reporte, à cet effet, la dent au point A, on

joint le talon D de cette dent au centre O′ par une droite et on porte l'angle de levée de 10° du point O′ et à partir de cette droite O′D. On porte ensuite les angles de repos et de tirage comme précédemment et l'on décrit l'arc de cercle D4 représentant le chemin décrit par l'extrémité du levier pendant le mouvement de l'ancre. L'arc de la développante devra joindre les points obtenus de 4 à 0, ainsi que le montre la construction.

Le reste du tracé est analogue à ceux des divers cas que nous avons précédemment examinés.

Un deuxième point faible de cette construction est le peu de largeur que posséderaient les leviers de l'ancre si on les construisait avec leurs côtés parallèles l'un à l'autre; on peut remédier à cet inconvénient en les formant ainsi que la figure les représente.

Dans l'application pratique de ce système, il faudrait nécessairement s'écarter des données théoriques en exécutant la forme de la surface d'impulsion du levier de sortie suivant un plan droit ou suivant une forme moins concave que la dent est extérieurement convexe.

En résumé, on peut constater qu'il ne serait pas extraordinairement difficile d'exécuter pratiquement cette construction, et cela d'une manière très suffisante.

Transmission de la force de la fourchette à la cheville de plateau.

464. Comme il est facile de s'en rendre compte, le système de la fourchette et de la cheville de plateau peut être assimilé à celui d'un engrenage et une théorie analogue à celle que nous avons exposée, permet de déterminer les formes de contact des deux mobiles.

Les circonférences primitives se calculeront au moyen des formules (199)

$$r = D \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} \quad \text{et} \quad r' = D \frac{\alpha}{\alpha + \alpha'},$$

dans lesquelles D représente la distance des centres, α l'angle de levée parcouru par le balancier pendant les périodes de dégagement et d'impulsion, α' l'angle de levée de l'ancre.

En employant, pour cette construction, la méthode des enveloppes (219), nous pourrons choisir la forme de la cheville suivant convenance et déterminer la forme de l'entrée de la fourchette en faisant rouler la circonférence du plateau autour de celle de la fourchette.

La planche 13 représente un tel système, la cheville de plateau étant formée de deux fines chevilles. Dans cette construction, la transmission de la force est uniforme et le tracé est celui d'un engrenage à lanterne (220).

465. La valeur du moment de la force transmise par rapport à l'axe du balancier sera, par suite, en faisant abstraction des frottements (208) :

$$F' = F \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

466. Nous ferons remarquer dans cette construction la grandeur de l'entrée de la fourchette. L'échappement à double cheville donne en général d'excellents résultats; par cette disposition, le dégagement s'effectue très près de la ligne des centres et l'impulsion, se donnant par l'intermédiaire d'une cheville fine, est également profitable au point de vue mécanique. Ajoutons encore qu'une fourchette d'acier trempé, agissant sur deux chevilles de laiton ou d'alliage d'or, ne demande pas d'huile aux points de contact et que l'usure des parties frottantes est insignifiante même après plusieurs années de marche. Cet avantage est appréciable et l'application de ce système pourrait être plus répandue. Si, du reste, une usure quelconque se remarque à la longue sur les chevilles, il est aisé, à chaque réparateur, de les remplacer.

Calcul des frottements de l'échappement à ancre.

467. **Perte de force due au frottement de la dent contre les leviers de l'ancre.** — Si dans l'étude de la transmission de la

force d'une roue à l'autre, de la roue à l'ancre et de la fourchette au balancier, on faisait abstraction du frottement, on arriverait à un résultat différant totalement des résultats obtenus par la pratique. Nous avons donné les lois physiques du frottement (341) et en ferons ici l'application immédiate.

468. Nous admettons la valeur du coefficient de frottement de 0,12 à 0,15 pour les corps employés en horlogerie, tels que le laiton, l'acier et les pierres fines.

Etudions d'abord le contact de la dent et du levier de sortie.

469. **Moment de la force par rapport à l'axe de l'ancre en tenant compte du frottement.**

1° Levier de sortie. — Les moments de force en action sur la roue sont d'abord P et —N. O*b* (452). Ajoutons encore le moment de la force du frottement : —*f*N. O*d*. Ce moment est négatif, cette force agissant en sens inverse de P. Nous aurons par suite la somme algébrique :

$$(1) \qquad P - N.\, Ob - fN.\, Od = 0.$$

Mais on a (fig. 127) :

$$Ob = r.\, \sin \beta \text{ et } Od = bb' + b'c,$$

en désignant par β l'angle formé par la normale NN' et la ligne des centres, puis par r et r' les rayons O*t* et O'*t* des circonférences primitives instantanées correspondant à la position représentée de la dent et de l'ancre.

Posons encore

$$b'c = p$$

et, comme

$$bb' = (r + r') \cos \beta,$$

on aura

$$Od = (r + r') \cos \beta + p.$$

L'équation (1) deviendra en définitive :

$$P - N.\, r \sin \beta - fN \,[(r + r') \cos \beta + p] = 0$$

et

$$(2) \qquad P = N.\, r \sin \beta + fN \,[(r + r') \cos \beta + p].$$

Les moments de force agissant sur le levier de l'ancre sont :

$$(3) \qquad Q - N.' \, O'b' + f N.' \, O'd' = 0.$$

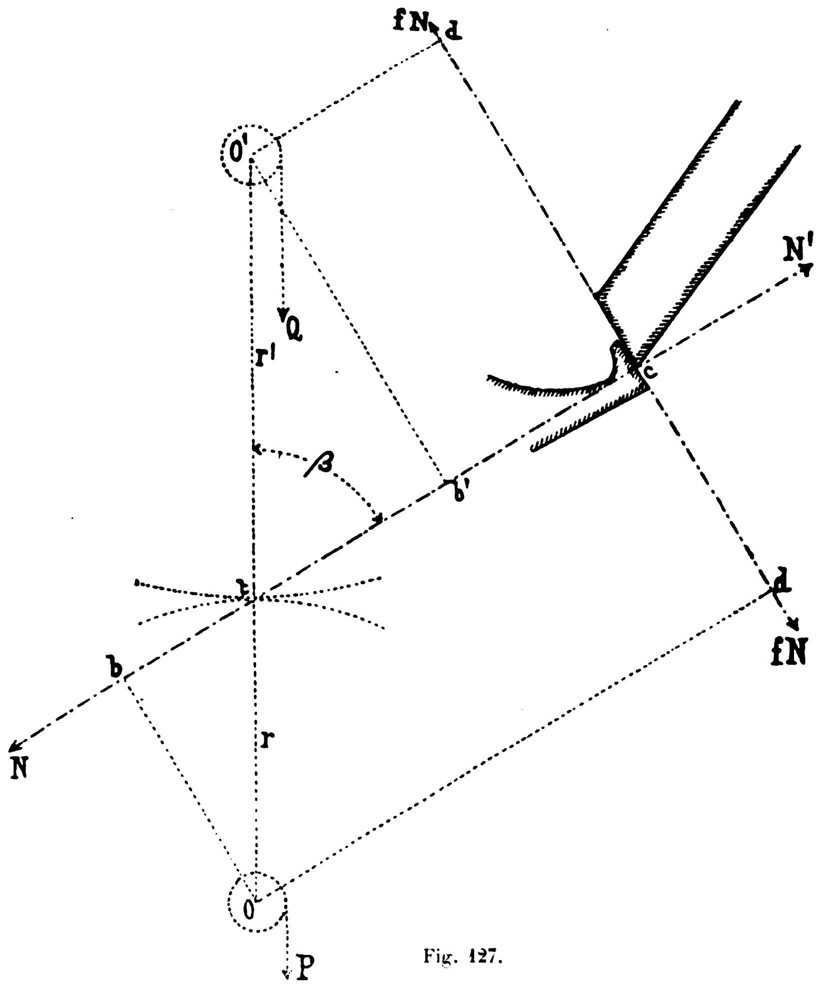


Fig. 127.

Remarquons que le moment de la force du frottement par rapport à l'axe de l'ancre est positif, cette force agissant dans le même sens que Q pour s'opposer au mouvement de la roue.

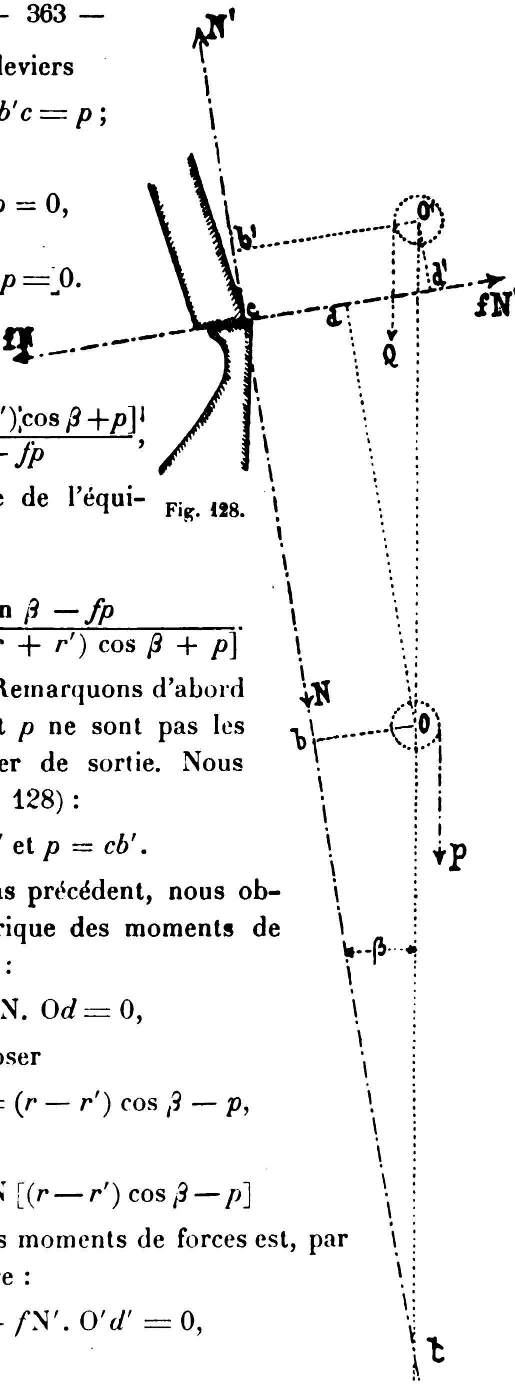


Fig. 128.

Nous avons les bras de leviers

$O'b' = r' \sin \beta$ et $O'd' = b'c = p$;

par suite,

$$Q - N'r' \sin \beta + fN'.p = 0,$$

et

(4) $Q = N'.r' \sin \beta - fN' p = 0.$

Divisant (2) par (4), on trouvera

(5) $$\frac{P}{Q} = \frac{r \sin \beta + f[(r + r') \cos \beta + p]}{r' \sin \beta - fp},$$

en remarquant qu'à cause de l'équilibre on a $N = N'$.

Et l'on aura enfin :

(6) $$Q = P \frac{r' \sin \beta - fp}{r \sin \beta + f[(r + r') \cos \beta + p]}.$$

2° Levier d'entrée. — Remarquons d'abord que les valeurs r, r', β et p ne sont pas les mêmes que celles du levier de sortie. Nous poserons par analogie (fig. 128) :

$$Ot = r,\ O't = r' \text{ et } p = cb'.$$

De même que dans le cas précédent, nous obtiendrons la somme algébrique des moments de forces agissant sur la roue :

(7) $$P - N.\,Ob - fN.\,Od = 0,$$

et comme nous pouvons poser

$$Ob = r \sin \beta.\ Od = (r - r') \cos \beta - p,$$

il viendra

(8) $$P = N.\,r \sin \beta + fN\,[(r - r') \cos \beta - p]$$

La somme algébrique des moments de forces est, par rapport au centre de l'ancre :

(9) $$Q - N'.\,O'b' + fN'.\,O'd' = 0,$$

et comme

$$O'b' = r' \sin \beta. \quad O'd' = cb' = p,$$

il viendra

(10) $$Q = N'.r' \sin \beta + fN'p.$$

Divisant (7) par (9), on obtiendra :

(11) $$\frac{P}{Q} = \frac{r \sin \beta + f[(r - r') \cos \beta - p]}{r' \sin \beta - fp},$$

d'où

(12) $$Q = P \frac{r' \sin \beta - fp}{r. \sin \beta + f[(r - r') \cos \beta - p]}.$$

470. Les équations (5) et (10) qui donnent la valeur du moment de force Q avec lequel l'ancre donne l'impulsion au balancier, sont exactes pour tous les échappements à ancre, cylindre ou autres semblables.

Pour un cas donné, il faut seulement déterminer les valeurs de r, r,' β et p, et celles-ci peuvent encore, comme nous l'avons vu, se modifier du commencement à la fin du mouvement. On peut alors calculer diverses valeurs de Q et en prendre la moyenne, puis multiplier cette valeur par l'angle parcouru pour trouver le travail de cette force.

Les valeurs de r, r,' β et p peuvent être déterminées par le dessin, mais le tracé doit être fait très exactement.

471. Appliquons cette théorie au système d'échappement à ancre représenté (planche 12). Dans cette construction, les valeurs de r, r,' β, restent constantes ; seule celle de p est variable. Nous aurons (fig. 129) :

$$p = O'd' = b'c.$$

Posons aussi

$$b''c = p''.$$

Nous pourrons également écrire :

$$p'' = \rho''\alpha'' = r'' \sin \beta.\alpha'',$$

en désignant par ρ'' le rayon du cercle développé et par α'' l'angle que forment les rayons $O''a''$ et $O''b''$.

Le point a'' est déterminé par une longueur d'arc $b''a''$ égale à $b''c$, cette dernière droite représentant la longueur du

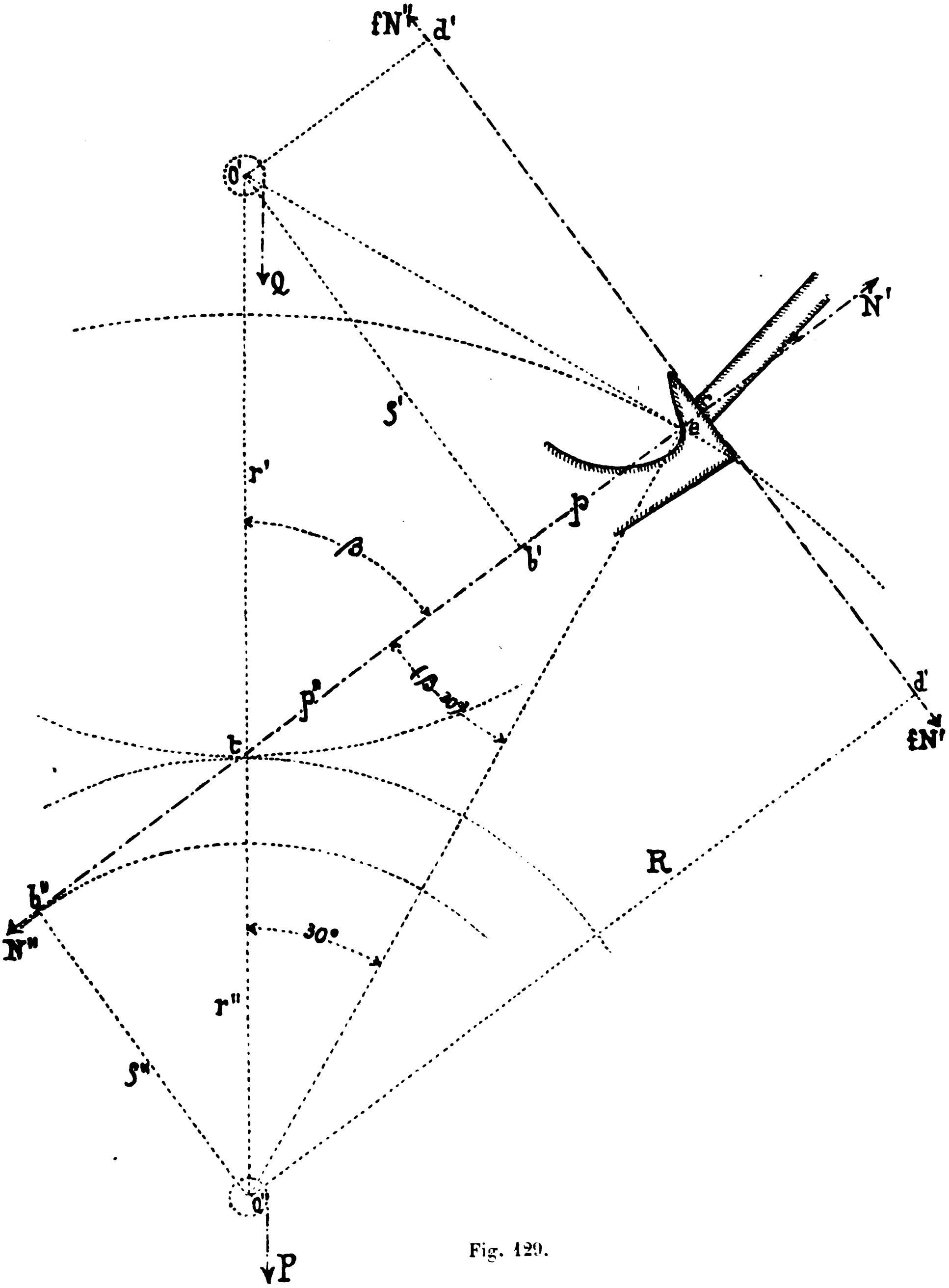


Fig. 129.

fil développé[1]. L'angle α'' est donc variable et varie proportionnellement à l'angle parcouru par la roue.

D'une manière analogue aux cas précédents, nous pourrons établir la somme algébrique des moments de forces agissant sur la roue et obtiendrons :

$$P - N.\, r'' \sin\beta - fN''.\, r'' \sin\beta\alpha'' = 0,$$

et pour l'ancre :

$$Q - N'r' \sin\beta + fN' \left[r''. \sin\beta\alpha'' - (r'' + r') \cos\beta\right] = 0.$$

De là le rapport :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r'' \sin\beta + fr''. \sin\beta\alpha''}{r' \sin\beta - fr'' \sin\beta\alpha'' + f(r'' + r') \cos\beta},$$

qui devient, en divisant par $r''. \sin\beta$:

$$(13) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{1 + f\alpha''}{\frac{r'}{r''} - f\alpha'' + f\frac{r'' + r'}{r''} \cot.\beta},$$

d'où l'on tire

$$(14) \qquad P = Q\, \frac{1 + f\alpha''}{\frac{r'}{r''} - f\alpha'' + f\frac{r'' + r'}{r''} \cot.\beta}.$$

Remarquons que nous serions arrivés au même résultat en introduisant dans la formule (5) la valeur de p, soit

$$r'' \sin\beta\alpha'' - (r' + r'') \cos\beta.$$

Nous obtenons ainsi la valeur du moment résistant par rapport à l'axe de la roue.

Cette valeur varie avec α'' ; elle est donc différente du commencement à la fin du mouvement. Si le frottement n'existait pas, les termes de la formule (14) qui contiennent le coefficient f, disparaîtraient et nous aurions au commencement comme à la fin de l'impulsion :

$$P = Q\, \frac{r''}{r'},$$

au levier d'entrée aussi bien qu'au levier de sortie.

472. Pour déterminer le travail mécanique absorbé par le frottement, reprenons la formule (14), dans laquelle nous ferons

[1] Le point a^{v} n'est pas indiqué sur la fig. 129, mais il est facile à se représenter.

$$\frac{r'}{r''} + f\frac{r'' + r'}{r''}\cot.\,\beta = \mathrm{K};$$

il viendra :

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}\,\frac{1 + f\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''}.$$

Multiplions cette dernière équation par $d\alpha''$ et intégrons, nous obtiendrons :

$$\mathrm{P}.\,d\alpha'' = \mathrm{Q}\,\frac{1 + f\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''}\,d\alpha''.$$

Or

$$\int \frac{1 + f\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''}\,d\alpha'' = \int \frac{d\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''} + f\int \frac{\alpha''\,d\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''}.$$

Posons

$$\mathrm{K} - f\alpha'' = z,$$

d'où

$$\alpha'' = \frac{\mathrm{K} - z}{f} \qquad \text{et} \qquad d\alpha'' = -\frac{dz}{f},$$

puis

$$\int \frac{d\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''} = -\int \frac{dz}{fz} = -\frac{1}{f}\,\frac{\log.\,(\mathrm{K} - f\alpha'')}{\log.\,e}.$$

La seconde intégrale donnera :

$$\int \frac{\alpha d\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''} = -\int \frac{(\mathrm{K} - z)\,dz}{f^2\,z} = -\frac{\mathrm{K}}{f^2}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{f^2}\int dz$$

et

$$\int \frac{\alpha''\,d\alpha''}{\mathrm{K} - f\alpha''} = -\frac{\mathrm{K}}{f^2}\,\frac{\log.\,(\mathrm{K} - f\alpha'')}{\log.\,e} + \frac{1}{f^2}\,(\mathrm{K} - f\alpha''),$$

d'où

$$\mathrm{P}\alpha'' = \mathrm{Q}\left[-\frac{\mathrm{K} + 1}{f}\cdot\frac{\log.\,(\mathrm{K} - f\alpha'')}{\log.\,e} + \frac{\mathrm{K}}{f} - \alpha''\right] + \mathrm{C}.$$

Prenant cette intégrale entre les limites α''_2 et α''_1, nous obtiendrons l'équation du travail de P :

$$(16)\quad \mathrm{P}\,(\alpha''_2 - \alpha''_1) = \mathrm{Q}\left[\frac{\mathrm{K} + 1}{f}\cdot\frac{\log.\,\dfrac{\mathrm{K} - f\alpha''_1}{\mathrm{K} - f\alpha''_2}}{\log.\,e} - (\alpha''_2 - \alpha''_1)\right].$$

473. Calculons numériquement la valeur de l'équation (16).

Nous avons :

$$K = \frac{r'}{r''} + f \frac{r'' + r'}{r''} \text{ cotang. } \beta.$$

Pour déterminer la valeur de l'angle β, on peut procéder comme suit.

Dans le triangle etO'', nous connaissons le côté $O''e = R$ (fig. 129), $O''t = r''$ et l'angle $tO''e = 30°$, par suite

$$\text{tang. } \beta = \frac{R \sin 30°}{R. \cos 30° - r''}.$$ [1]

Mais

$$r'' = D \frac{\alpha'}{\alpha'' + \alpha'} \quad \text{et} \quad R = D \cos 30°;$$

en substituant, il vient :

$$\text{tang. } \beta = \frac{D \cos 30° \sin 30°}{D \cos^2 30° - D \dfrac{\alpha'}{\alpha'' + \alpha'}} = \frac{\cos 30° \sin 30°}{\cos^2 30° - \dfrac{\alpha'}{\alpha'' + \alpha'}},$$

et comme

$$\sin 30° = \frac{1}{2}. \cos^2 30° = 0{,}75. \frac{\alpha'}{\alpha'' + \alpha'} = \frac{3}{7},$$

il viendra :

$$\text{tang. } \beta = \frac{\dfrac{1}{2} \cos 30°}{0{,}75 - \dfrac{3}{7}} = \frac{7 \cos 30°}{4{,}5};$$

par suite

$$\text{cotang. } \beta = \frac{4{,}5}{7. \cos 30°}.$$

[1] Dans un triangle tel que ABC (fig. 130), dont on connaît deux côtés a et b avec l'angle adjacent C, on peut déterminer la valeur de l'angle β, supplémentaire de BAC, en abaissant la perpendiculaire $BP = y$ sur le prolongement du côté AC, soit $AP = x$. On aura dans le triangle rectangle APB :

$$\text{tang. } \beta = \frac{y}{x}.$$

D'autre-part,

$y = a \sin C$ et $x = a \cos C - b$,

d'où

$$\text{tang. } \beta = \frac{a \sin C}{a \cos C - b}.$$

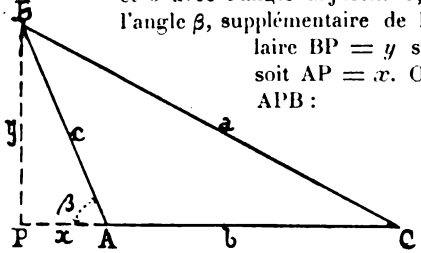


Fig. 130.

Le calcul donne :

$$\log.\ 4{,}5 = 0{,}6532125$$
$$-\log : 7.\ \cos 30^{\circ} = \underline{0{,}7826286}$$
$$\log.\ \cot : \beta = 9{,}8705839\ ;$$

d'où

$$\beta = 53^{\circ}\,24'\,47''62.$$

Nous pourrons maintenant calculer la valeur de K, car nous avons :

$$\frac{r'}{r''} = 1{,}333...,\ \frac{r'' + r'}{r''} = 2{,}333...\ f.\ \frac{r'' + r'}{r''} = 0{,}15 \times 2{,}333 = 0{,}35\ ;$$

$$\log.\ \cot.\ \beta = 9{,}8705839$$
$$+ \log.\ f.\ \frac{r'' + r'}{r''} = \underline{0{,}5440680 - 1}$$
$$0{,}4146519 - 1 = \log.\ 0{,}2598077$$
$$+ \frac{r'}{r''} = \underline{1{,}3333333}$$
$$K = 1{,}5931410$$

$$\frac{K + 1}{f} = \frac{2{,}593141}{0{,}15} = 17{,}2876.$$

Pour déterminer la valeur de l'angle α''_0, nous remarquerons, en rappelant ce qui a déjà été dit (471), que lorsque le contact de la dent et du levier a lieu au commencement du mouvement de la roue, la longueur du fil développé est $b''e$. Or

$$b''e = \rho''\alpha''_0 = \rho''.\ \text{cotang} : (\beta - 30^{\circ}),$$

d'où

$$\alpha''_0 = \cot.\ (\beta - 30^{\circ}).$$

On peut voir, en effet, que l'angle $b''e\,O''$ du même triangle est égal à $(\beta - 30^{\circ})$.

Nous avons :

$$\log.\ \cot.\ (\beta - 30^{\circ}) = 0{,}3634996,$$

d'où

$$\alpha''_0 = 2{,}3094,$$

La roue parcourt 11° jusqu'à la fin de la levée, si nous ajoutons à l'arc de α''_0 celui de 11°, nous obtiendrons celui de α''_2 :

$$\begin{aligned} \text{arc } \alpha''_0 &= 2{,}3094 \\ + \text{ arc } 11^\circ &= \underline{0{,}191986} \\ \alpha''_2 &= 2{,}501386. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'angle α''_1, nous devons ajouter à α''_0 la valeur de l'angle parcouru par la roue pendant qu'elle n'est pas en contact avec l'ancre. Un calcul que nous donnerons plus loin, permettra de déterminer l'angle que l'ancre parcourt sans être en contact avec la roue; nous admettrons, pour le moment, cette valeur égale à

$$0{,}0333505.$$

La roue parcourra, pendant ce temps, un angle 1,333... fois plus grand, soit :

$$0{,}0333505 \times 1{,}333... = 0{,}0444673.$$

Ajoutant à cette valeur celle de α''_0, nous aurons :

$$\alpha''_1 = 2{,}3094 + 0{,}044467 = 2{,}35387.$$

Nous pouvons maintenant effectuer notre calcul :

$$\begin{aligned} K &= 1{,}59314 & K &= 1{,}59314 \\ -f\alpha''_1 &= \underline{0{,}35308} & -f\alpha''_2 &= \underline{0{,}37521} \\ & \ 1{,}24006 & & \ 1{,}21793 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log : (K - f\alpha''_1) &= 0{,}0934430 \\ -\log : (K - f\alpha''_2) &= \underline{0{,}0856231} \\ & \ 0{,}0078199 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\left(\log.\frac{K - f\alpha''_1}{K - f\alpha''_2}\right) &= 0{,}8932012 - 3 \\ -\log.(\log. e) &= \underline{0{,}6377843 - 1} \\ & \ 0{,}2554169 - 2 \\ +\log.\frac{K+1}{f} &= \underline{1{,}2377347} \\ & \ 0{,}4931516 - 1 = \log. 0{,}31128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ 0{,}31128 \\ -(\alpha''_2 - \alpha''_1) &= \underline{0{,}14752} \\ & \ 0{,}16376 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log : 0{,}16376 &= 0{,}2142078 - 1 \\ +\log : Q &= \underline{0{,}8881528 - 1} \\ & \ 0{,}1023606 - 1. \end{aligned}$$

Travail moteur de la roue $= 0{,}12651$ gr. mm.

$$
\begin{array}{r}
0{,}1023606 - 1 \\
-\log : (\alpha''_2 - \alpha''_1) = \underline{0{,}1688481 - 1} \\
0{,}9335125 - 1.
\end{array}
$$

Moment moteur de la roue $= 0{,}85806$ gr. pour le levier de sortie.

474. En faisant une construction analogue et un calcul semblable, on arriverait, pour le levier d'entrée, au résultat suivant :

$$P = 0{,}833808 \text{ gr.}$$

En comparant ces deux valeurs de P, on peut constater que la transmission de la force est, pour cette construction d'échappement, à peu près uniforme sur l'un comme sur l'autre leviers.

475. Dans le calcul précédent, nous avons admis le moment de la force qui doit être transmise à l'ancre :

$$Q = 0{,}7729525 \text{ gr.};$$

le *moment moyen* de la force qui doit actionner la roue, sera donc :

$$P = 0{,}84593 \text{ gr.}$$

S'il n'y avait pas de frottement, nous aurions simplement :

$$Q = 1{,}333\ldots P,$$

soit

$$Q = 1{,}1276 \text{ gr.}$$

On peut ainsi constater que la force absorbée par le frottement est à peu près un tiers de la force motrice.

Détermination du moment de la force avec laquelle l'ancre est attirée contre les parois par la pression de la roue au repos.

476. Nous établirons ce calcul pour l'ancre à repos équidistants et choisirons pour cette recherche le levier de sortie.

Soit P (fig. 131) le moment de la force actionnant la roue

et Q celui que nous recherchons, c'est-à-dire le moment de la force qu'il faut opposer à l'ancre pour la mettre en mouvement.

Désignons par α l'angle de tirage de l'ancre. Sur la roue agissent les forces : P, dont le moment est P, puis la réaction normale N développée par l'ancre et dont le moment est

$$-\text{N}.\,\text{O}b = -\text{N}.\,\text{R}\cos.\alpha\,;$$

nous avons ensuite la force fN du frottement agissant sur la roue ; son moment est

$$-f\text{N}.\,\text{O}d = -f\text{N}.\,\text{R}\sin\alpha.$$

On aura donc, à cause de l'équilibre, la somme algébrique :

$$\text{P} - \text{N}.\,\text{R}\cos\alpha - f\text{N}.\,\text{R}\sin\alpha = 0$$

ou

$$(1)\qquad \text{P} = \text{N}.\,\text{R}\cos\alpha + f\text{N}.\,\text{R}\sin\alpha.$$

Sur l'ancre agissent le moment Q, puis la pression normale N' = N, dont le moment est égal à

$$-\text{N}'.\,\text{O}'b' = -\text{N}'r.\,\sin\alpha,$$

et enfin la force du frottement fN', dont le moment est

$$f\text{N}'.\,\text{O}'d' = f\text{N}'\,r.\,\cos\alpha\,;$$

cette force, agissant dans le même sens que Q, sera donc positive par rapport à l'ancre. Nous aurons par suite la somme

$$\text{Q} - \text{N}'.\,r\sin\alpha + f\text{N}'.\,r\cos\alpha = 0$$

ou

$$(2)\qquad \text{Q} = \text{N}'r\sin\alpha - f\text{N}'.\,r\cos\alpha.$$

Divisant (2) par (1), il vient :

$$\frac{\text{Q}}{\text{P}} = \frac{r}{\text{R}}\,\frac{\sin\alpha - f.\,\cos\alpha}{\cos\alpha + f.\,\sin\alpha}.$$

Divisons encore par cos α et remarquons que

$$\frac{r}{\text{R}} = \text{tang. } 30^\circ\,;$$

nous aurons :

$$(3)\qquad \text{Q} = \text{P tang. } 30^\circ\,\frac{\text{tang. }\alpha - f}{1 + f.\,\text{tang. }\alpha}.$$

Cette équation nous donne une valeur positive lorsque tang. α est plus grand que f. En admettant le coefficient de frottement égal à 0,15, α devra être plus grand que 8° 32′.

En prenant $\alpha = 12°$ et P = 1 gr., le calcul donnera :

$$Q = 1 \times 0{,}57735 \frac{0{,}21256 - 0{,}15}{1 + 0{,}15 \times 0{,}21256} = 0{,}035 \text{ gr.}$$

Pour $\alpha = 15°$, on obtiendrait :

$$Q = 0{,}065 \text{ gr.}$$

477. **Remarque.** — Le moment de la force nécessaire pour dégager l'ancre du repos sera exprimé par la formule

$$(4) \quad Q = P \operatorname{tang}.30° \frac{\operatorname{tang}.\alpha + f}{1 - f.\operatorname{tang}.\alpha},$$

dans laquelle les termes contenant le coefficient f changent de signe.

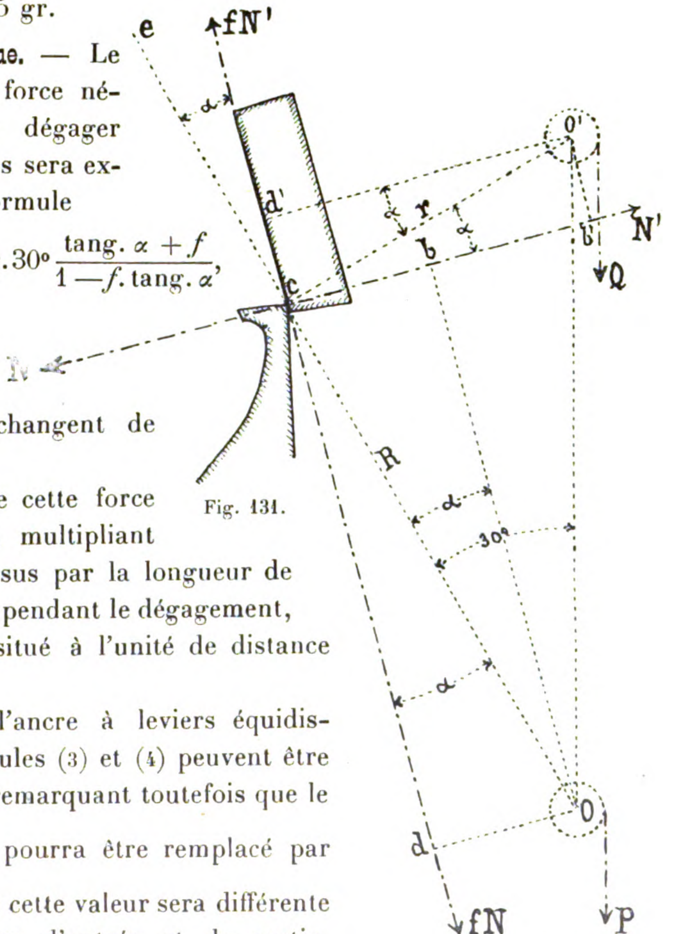


Fig. 131.

Le travail de cette force s'obtiendra en multipliant la valeur ci-dessus par la longueur de l'arc parcouru, pendant le dégagement, par un point situé à l'unité de distance de l'axe.

478. Pour l'ancre à leviers équidistants, les formules (3) et (4) peuvent être employées en remarquant toutefois que le rapport $\frac{r}{R}$ ne pourra être remplacé par tang 30° et que cette valeur sera différente pour les leviers d'entrée et de sortie. C'est pour cette raison que, dans cette dernière construction, on a souvent introduit des angles de tirage différant de l'un

à l'autre leviers. Il sera, dans ce cas, toujours facile d'établir les valeurs de l'angle de tirage donnant des résistances égales au dégagement de l'ancre.

Des chocs dans l'échappement à ancre.

479. L'examen du fonctionnement de l'échappement à ancre nous a montré les chocs qui se produisent entre ses différents organes. Nous rencontrons en effet :

1° choc de la cheville de plateau contre l'un des côtés de l'entrée de la fourchette : ce choc termine l'arc d'oscillation supplémentaire du balancier ;

2° choc de la dent de la roue contre le plan d'impulsion de l'ancre ;

3° choc de la fourchette contre la cheville de plateau au commencement de la période d'impulsion ;

4° choc de la dent de la roue contre le plan de repos de l'ancre après le parcours de l'angle de chute.

Nous étudierons donc les effets mécaniques des chocs sur la vitesse du balancier en tant que ceux-ci exercent une influence sur l'organe régulateur.

Nous rappellerons, en premier lieu, la théorie générale des chocs en dynamique.

480. Supposons le cas le plus simple, celui où les centres de gravité des deux corps se meuvent suivant une même ligne droite par rapport à laquelle les deux corps sont symétriques. C'est à ce cas qu'on ramène les applications pratiques du choc.

Le centre de gravité de l'ensemble se déplacera sur la droite suivie par les deux corps, en vertu du principe de la réaction égale à l'action. De plus, il est évident que la vitesse de chacun des corps en particulier ne change pas de direction, mais bien d'intensité, et même l'une peut changer de signe.

Soient m et m' les masses (37) des deux corps, v et v' leurs vitesses respectives avant le choc, u la vitesse du centre de gravité de l'ensemble après le choc. Admettons que le

mouvement de toutes les molécules de chacun des deux corps puisse être considéré comme n'étant qu'un simple mouvement de translation, qui est le même pour toutes les molécules, nous aurons :

$$mV + m'V' = mv + m'v'.$$

V étant la vitesse commune à tous les points et au centre de gravité du solide de masse m à un instant quelconque du choc, V' celle de tous les points et du centre de gravité du solide de masse m' au même instant. Il y a toujours, pendant le choc, un instant où les centres de gravité des deux corps ont la même vitesse, qui est aussi la vitesse u du centre de gravité du système. A cet instant, l'équation précédente devient :

$$(m + m')\,u = mv + m'v',$$

ce qu'on exprime en disant que la quantité de mouvement (38) après le choc est égale à la quantité de mouvement avant le choc.

On aura par suite :

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Lorsque les deux corps ne sont pas élastiques, c'est-à-dire quand ils conservent les formes que des forces quelconques peuvent leur donner, les actions mutuelles cessent leur effet dès que la vitesse u est devenue commune aux deux corps ; alors les corps se meuvent sans perdre contact tant que des forces extérieures ne viennent pas modifier leur vitesse commune u.

Les formules précédentes s'appliquent au cas où les corps marchent en sens contraires comme à celui où ils vont dans le même sens ; seulement il faut avoir égard aux signes qu'il convient de donner aux valeurs de v et v', et par suite à celles de mv et de $m'v'$. Le signe de u est toujours celui de la plus grande quantité de mouvement.

Si les deux quantités de mouvement sont égales et de signes contraires, la formule précédente donne $u = 0$, ce qui

nous montre que les corps arrivent au repos et y demeurent s'ils sont dénués d'élasticité.

Si l'un des corps est au repos, on a

$$(m + m')\, u = mv,$$

d'où

$$u = \frac{mv}{m + m'}.$$

481. L'hypothèse des corps mous ne se réalise généralement pas en pratique. Les pièces de machines, quand elles se choquent, prennent ordinairement une vitesse commune dans le sens normal au contact et il en résulte des pertes de puissance vive qu'il importe de réduire autant que possible, puisqu'elles diminuent le travail utile. Dans la pratique cependant, ces pertes de puissance vive peuvent se calculer comme si les corps étaient dénués d'élasticité. Nous traiterons, plus loin, la question du choc des corps élastiques (486).

482. La vitesse linéaire du point de la cheville de plateau qui rencontre l'entrée de la fourchette, est avant le choc

$$r\omega,$$

ω étant la vitesse angulaire du balancier en cet instant (36) et r la distance du centre au point considéré de la cheville. La vitesse linéaire acquise après le choc par le point de contact de la fourchette sera

$$r'\omega'.$$

Substituons maintenant au balancier et au système de la fourchette et de l'ancre des corps fictifs dont les *moments d'inertie* soient les mêmes que ceux des corps qu'ils remplacent, mais dont les masses soient condensées à des distances r et r' de leurs centres de rotation.

Le moment d'inertie A d'un corps est représenté par la formule

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{P}}{g}\, r^2,$$

dans laquelle $\frac{\mathrm{P}}{g}$ représente la masse du mobile (37). Bien que nous ne devions traiter la question du moment d'inertie que

dans la théorie du réglage, nous pouvons admettre, pour le moment, cette formule telle que nous la donnons ici. Toutefois, afin que cette valeur représente quelque chose à l'esprit, nous dirons encore que le moment d'inertie d'un corps soumis à un mouvement de rotation est une mesure de la résistance offerte par ce corps à un changement dans sa vitesse de rotation.

Nous pourrons conséquemment représenter la masse des deux anneaux par les expressions :

$$\frac{A}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{A'}{r'^2},$$

puisque

$$M = \frac{P}{g}$$

et que nous tirons de

$$A = \frac{P}{g} r^2$$

la valeur

$$P = \frac{Ag}{r^2}.$$

Nous pouvons ainsi appliquer le théorème des corps dépourvus d'élasliscité que nous avons rappelé plus haut et remplacer, dans la formule générale

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

m et v par leurs valeurs déterminées, en remarquant que l'ancre était au repos avant le choc. Nous aurons donc

$$r\,\Omega = \frac{\frac{A}{r^2}\,r\omega}{\frac{A}{r^2} + \frac{A'}{r'^2}}$$

ou

$$(1) \qquad \Omega = \frac{\omega}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{r}{r'}\right)^2}.$$

En appelant $\frac{\alpha}{\alpha'}$ le rapport des angles parcourus par l'ancre et le balancier et remarquant que

$$\frac{r}{r'} = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

on obtiendra encore

$$(2) \qquad \Omega = \frac{\omega}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2},$$

expression de la vitesse angulaire du balancier après le choc.

483. La vitesse angulaire ω' de l'ancre devra être $\frac{\Omega}{3}$, si le rapport des angles parcourus par les deux mobiles est égal à 3, c'est-à-dire que, d'une manière générale, on aura

$$\omega' = \frac{\alpha'}{\alpha}\,\Omega.$$

Cette vitesse doit être suffisante pour mettre en mouvement la roue. La dent, appuyée jusqu'ici contre le plan de repos du levier de l'ancre, oppose une résistance au mouvement de l'ancre, dont la vitesse se trouvera, par le fait, diminuée. Nous pouvons assimiler cette action à celle d'un nouveau choc. La vitesse angulaire du système de l'ancre et de la fourchette deviendra donc, d'une manière analogue au cas précédent et en appelant A″ le moment d'inertie de la roue :

$$\Omega' = \frac{\omega'}{1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\Omega}{1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2},$$

ou encore

$$\Omega' = \frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{\omega}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}}{1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2} = \frac{\omega}{3\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]\left[1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\right]}.$$

Par suite de la diminution de vitesse de la fourchette, celle du balancier sera également diminuée et le choc résultant donnera successivement :

$$\Omega_1 r = \frac{\frac{A}{r^2}\,\Omega\, r + \frac{A'}{r'^2}\,\Omega'\, r'}{\frac{A}{r^2} + \frac{A'}{r'^2}}$$

et

$$\Omega_1 = \frac{\frac{A}{r^2}\,\Omega + \frac{A'}{r'}\,\frac{\Omega'}{r}}{\frac{A}{r^2} + \frac{A'}{r'^2}} = \frac{A\Omega + A'\,\Omega'\,\frac{r}{r'}}{A + A'\left(\frac{r}{r'}\right)^2} = \frac{\Omega + \frac{A'}{A}\,\Omega'\,\frac{\alpha'}{\alpha}}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}$$

En remplaçant Ω et Ω' par leur valeur, nous aurons :

$$\Omega_1 = \frac{\dfrac{\omega}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2} + \dfrac{A'}{A}\,\dfrac{\omega\,\frac{\alpha'}{\alpha}}{3\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]\left[1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\right]}}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}$$

ou

$$\Omega_1 = \omega \left\{ \frac{1 + \frac{A'}{A}\frac{\alpha'}{\alpha}\,\dfrac{1}{3\left[1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\right]}}{\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2} \right\}$$

ou encore :

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2} \left\{ 1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{\left[1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\right]} \right\},$$

et enfin

$$(2) \qquad \Omega_1 = \frac{\omega}{\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2} \left\{ 1 + \frac{\frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}{1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2} \right\},$$

expression qui donne la valeur de la vitesse angulaire du balancier après le choc de la cheville de plateau contre la fourchette, en tenant compte de la résistance au dégagement de la roue, c'est-à-dire de sa quantité de mouvement de recul.

484. Proposons-nous de soumettre l'équation précédente au calcul et soient les données suivantes :

$$P = 0{,}6 \text{ gr.} \qquad P' = 0{,}0374 \text{ gr.} \qquad P'' = 0{,}029 \text{ gr.}$$
$$r = 8{,}25^{\text{mm}} \qquad r' = 3^{\text{mm}}. \qquad r'' = 2{,}8^{\text{mm}}.$$

Nous avons ;

$$A = \frac{P}{g}\, r^2.\ A' = \frac{P'}{g}\, r'^2 \quad \text{et} \quad A'' = \frac{P''}{g}\, r''^2.$$

De plus,

$$\alpha = 30°,\ \alpha' = 10°;\ \text{donc}\ \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{3}$$

et

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} = \text{tang. } 15°.\ \text{tang. } 30°.$$

Le rapport $\frac{R\alpha''}{r_1\alpha'}$ des arcs parcourus par la roue et l'ancre pendant la période de dégagement est, en effet, fonction de l'angle de tirage, soit du rapport de son sinus à son cosinus, et l'on a

$$\frac{R\alpha''}{r_1\alpha'} = \text{tang. } 15°.$$

Mais comme

$$\frac{r_1}{R} = \text{tang. } 30°,$$

il viendra

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} = \text{tang. } 30° \text{ tang. } 15°.$$

Soit encore la vitesse angulaire du balancier avant le choc

$$\omega = 60{,}0353^{\text{mm}}.$$

Le calcul donnera maintenant :

$\log : P = 0{,}7781513 - 1$	$\log : P' = 0{,}5728716 - 2$
$\log : r^2 = 1{,}8329078$	$\log : r'^2 = 0{,}9542425$
$\log : Ag = 1{,}6110591$	$\log : A'g. = 0{,}5271141 - 1$

$$\log : A'g. = 0{,}5271141 - 1$$
$$\log : Ag. = 1{,}6110591$$
$$\overline{\quad 0{,}9160550 - 3}$$
$$-\log : 9 = 0{,}9542425$$
$$\log . \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 0{,}9618125 - 4$$
$$\frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 0{,}000915825.$$

$$\log : P'' = 0{,}4623980 - 2$$
$$\log : r''^2 = 0{,}8943160$$
$$\log . A''g. = 0{,}3567140 - 1$$
$$-\log . A'g = 0{,}5271141 - 1$$
$$\overline{\quad 0{,}8295999 - 1}$$
$$\log . \left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 = 0{,}3789838 - 2$$
$$\overline{\quad 0{,}2085837 - 2.}$$

$$\log . \tan g. 15^\circ = 9{,}4280525$$
$$\log . \tan g. 30^\circ = 9{,}7614394$$
$$\log . \frac{\alpha''}{\alpha'} = 0{,}1894919 - 1$$
$$\log . \left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 = 0{,}3789838 - 2$$
$$\frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 = 0{,}0161653.$$

$$\log . \left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right] = 0{,}0003976$$
$$\log . \left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2 = 0{,}0007952$$

$$\log . \omega = 1{,}7784067$$
$$-\log . \left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2 = 0{,}0007952$$
$$\overline{\quad 1{,}7776115}$$

$$\log . \left[1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\right] = 0{,}0069644$$
$$\log . \left[\frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2 = 0{,}9618125 - 4$$
$$-\log . \left[1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\right] = 0{,}0069644$$
$$\overline{\quad 0{,}9548481 - 4}$$

Nomb : corr. = 0,000901256.

Nous aurons donc

$$\log . \frac{\omega}{\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2} = 1{,}7776115$$
$$\log . \left[1 + \frac{\frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}{1 + \frac{A''}{A'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2}\right] = 0{,}0003911$$
$$\log . \Omega_1 = 1{,}7780026$$

et

$$\Omega_1 = 59{,}9795^{mm},$$

valeur de la vitesse angulaire du balancier après le choc.

La vitesse absorbée sera donc :

vitesse avant le choc	:	60,0353
» après »	:	59,9795
vitesse perdue par le choc	:	$0{,}0558^{mm}$

485. Dans le problème précédent, nous avons considéré les corps qui se choquent comme des corps mous, c'est-à-dire dépourvus d'élasticité. Dans ce cas, les deux corps réagissent d'abord l'un sur l'autre, puis se meuvent ensemble avec une vitesse commune.

L'application de ce principe n'est pas absolument exacte, puisque ni la cheville de plateau ni la fourchette ne peuvent être admis comme des corps mous.

Considérons maintenant le cas du choc des corps élastiques.

486. Si les deux corps sont parfaitement élastiques, le choc ne se terminera plus à l'instant du maximum de compression ; les corps, à partir de cet instant, reviennent exactement à leur forme primitive, au lieu de rester aplatis l'un contre l'autre en marchant de compagnie.

Pendant toute la durée de cette dernière période, la force de réaction reprendra les mêmes valeurs que dans la première, puisque les molécules auront les mêmes positions relatives ; par suite, les vitesses qui seront alors imprimées ou détruites, seront précisément égales à celles qui l'ont été pendant la compression.

Désignons par m et m' les masses des deux corps, par v et v' leurs vitesses à l'instant précédant le choc, par V et V' celles qu'ils possèdent après leur séparation.

On peut admettre que, dans le choc des corps parfaitement élastiques, la force vive perdue pendant la compression doit être égale à celle qui est restituée après que les corps ont repris leur forme première. Donc la somme des forces

vives, après le choc, est égale à la somme des forces vives initiales. On aura conséquemment

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2$$

ou

(1) $$m'(V'^2 - v'^2) = m(v^2 - V^2).$$

Cette équation contenant les deux inconnues V et V′, nous devons établir encore la seconde condition de l'égalité de la quantité de mouvement avant et après le choc. Donc

(2) $$mV + m'V' = mv + m'v'.$$

Dans le cas que nous envisageons, la vitesse v' de la fourchette est nulle ; les équations (1) et (2) deviennent :

(3) $$m'V'^2 = m(v^2 - V^2)$$

(4) $$m'V' = m(v - V).$$

Divisant (3) par (4) on obtient :

$$\frac{V'^2}{V'} = \frac{v^2 - V}{v - V},$$

d'où

(5) $$V' = v + V$$

Multiplions cette équation par m et ajoutons la formule (4) ; on obtiendra

$$(m + m')V' = 2mv,$$

d'où l'on tire :

(6) $$V' = \frac{2m}{m + m'}.$$

Multipliant de même (5) par m' et retranchant (4), on aura :

(7) $$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}.$$

La formule (6) donne la vitesse finale du corps qui était au repos avant le choc et la formule (7) la vitesse finale du corps qui est venu le choquer.

487. Remarquons maintenant que, tombant d'une hauteur h, un corps parfaitement mou s'aplatira sur le corps choqué ; que, par contre, un corps parfaitement élastique rebondira jusqu'à la hauteur h de laquelle il est tombé.

Comme aucun corps ne présente cette dernière qualité, il en résulte qu'aucun corps n'est parfaitement élastique et que les formules que nous venons d'établir, se modifieront suivant l'élasticité des corps choqués. Nous devrons donc multiplier la valeur (6) par un terme de la forme $(1 + k)$, k représentant un coefficient que l'on obtiendra par la relation

$$k = \sqrt{\frac{h'}{h}},$$

dans laquelle h est la hauteur de chute et h' la hauteur à laquelle le corps tombé rebondit après le choc.

Une expérience a montré qu'un morceau d'acier tombant d'une hauteur de 500 mm. sur une enclume remonte en moyenne à une hauteur de 200 mm.

On a donc

$$k = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,6$$

en chiffre rond.

Si h' n'était que de 150 mm., on aurait

$$k = \sqrt{\frac{150}{500}} = \sqrt{0,3} = 0,547....$$

La formule (6) devrait donc s'écrire :

$$V' = \left(1 + k\right) \frac{mv}{m + m'}. \qquad (8)$$

488. Soient maintenant, comme précédemment (482), A et A' les moments d'inertie du balancier et du système de l'ancre et de la fourchette, nous aurons :

$$m = \frac{A}{r^2} \quad \text{et} \quad m' = \frac{A'}{r'^2}$$

et

$$V' = \Omega' r' \ \ V = \Omega r \text{ et } v = \omega r.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (8), on obtient :

$$\Omega' r' = \frac{\frac{A}{r^2} \omega r}{\frac{A}{r^2} + \frac{A'}{r'^2}} (1 + k)$$

ou

$$\Omega' r' = \frac{\omega r}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{r}{r'}\right)^2}(1 + k) = \frac{\omega r}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}(1 + k)$$

et

$$\Omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}(1 + k),$$

vitesse angulaire de l'ancre après le choc.

La puissance vive sera alors :

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\Omega'^2 A' = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega \frac{\alpha'}{\alpha}}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}\right)^2 A'(1 + k)^2.$$

Cette puissance vive est égale au travail mécanique développé par l'action de la dent contre le plan de repos de l'ancre (43).

Nous avons déterminé le moment de la force nécessaire pour dégager l'ancre du repos (477) et avons obtenu la formule :

$$(10) \qquad Q = M \text{ tang. } 30^\circ \frac{\text{tang. } \beta + f}{1 - f.\text{ tang. } \beta}.$$

M représentant le moment de la force par rapport au centre de la roue et Q ce moment par rapport au centre de l'ancre, β est l'angle de tirage.

On aura le travail de cette force en multipliant sa valeur par α_1, c'est-à-dire par l'angle que pourrait parcourir l'ancre si elle était libre et avait acquis la puissance vive donnée en (9) tout en étant soumise à la pression déterminée par (10). On aura donc :

$$\frac{1}{2}A'\left(\frac{\omega \frac{\alpha'}{\alpha}}{1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}\right)^2 (1 + k)^2 = M\alpha'_1 \text{ tang. } 30^\circ \frac{\text{tang. } \beta + f}{1 - f \text{ tang. } \beta},$$

d'où

$$(11)\qquad \alpha'_1 = \frac{\dfrac{A'}{2}\left(\dfrac{\omega\dfrac{\alpha'}{\alpha}}{1+\dfrac{A'}{A}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}\right)^2(1+k)^2}{M.\ \text{tang.}\ 30^\circ\ \dfrac{\text{tang.}\ \beta + f}{1 - f.\ \text{tang.}\ \beta}}.$$

489. **Calcul numérique de l'équation précédente.** — Soient les mêmes données que dans le cas précédent (484) :

$P = 0{,}6$ gr. $\qquad P' = 0{,}0374$ gr. $\qquad M = 1$ gr.
$r = 8{,}25$ mm. $\qquad r' = 3$ mm.

Nous aurons la valeur du dénominateur :

$$M.\ \text{tang.}\ 30^\circ\ \frac{\text{tang.}\ \beta + f}{1 - f.\ \text{tang.}\ \beta},$$

pour $\beta = 15^\circ$ et $f = 0{,}15$, par le calcul :

$$Q = \frac{0{,}57733\ (0{,}26791 + 0{,}15)}{1 - 0{,}15 \times 0{,}26791} = \frac{0{,}57733 \times 0{,}41791}{0{,}95982},$$

d'où

$$Q = 0{,}25138 \text{ gr.}$$

Soit encore la vitesse angulaire du balancier au moment du choc (— 15° 45′)

$$\omega = 60{,}0353 \text{ mm.},$$

l'angle de levée de l'ancre $\alpha' = 10^\circ$,
et celui du balancier. . . $\alpha = 30^\circ$. Donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Admettons $k = 0{,}5$ (487), on a alors $1 + k = 1{,}5$

$$\text{et } (1+k)^2 = 2{,}25.$$

Le calcul donnera maintenant :

$$\log : \omega^2 = 3{,}5568134$$

$$+ \log.\ \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = \underline{0{,}0457575 - 1}$$

$$\log.\ \omega^2 \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 2{,}6025709$$

On a

$$\frac{A'}{A} = \frac{P'r'^2}{P\,r^2}.$$

$$\log : P' = 0{,}5728716 - 2 \qquad \log : P = 0{,}7781513 - 1$$

$$\log : r'^2 = \underline{0{,}9542425} \qquad \log : r^2 = \underline{1{,}8329078}$$

$$0{,}5271141 - 1 \qquad 1{,}6110591$$

$$\log : P'r'^2 = 0{,}5271141 - 1$$

$$-\log : P\,r^2 = \underline{1{,}6110591}$$

$$\log.\frac{A'}{A} = 0{,}9160550 - 3$$

$$+\log.\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = \underline{0{,}0457575 - 1}$$

$$\log.\frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 0{,}9618125 - 4$$

$$\frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 0{,}000915825$$

$$1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 1{,}000915825$$

$$\log : 1{,}0009158 = 0{,}0003975$$

$$\times\, 2 = 0{,}0007950 = \log.\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2$$

$$\log : P'r'^2 = 0{,}5271141 - 1$$

$$-\log : g. = \underline{3{,}9916159}$$

$$\log : A' = 0{,}5354982 - 5$$

$$-\log : 2 = \underline{0{,}3010300}$$

$$\log.\frac{A'}{2} = 0{,}2344682 - 5$$

$$\log.\left(\omega\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 2{,}6025709$$

$$-\log.\left[1 + \frac{A'}{A}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]^2 = \underline{0{,}0007950}$$

$$2{,}6017759$$

$$+\log.\frac{A'}{2} = 0{,}2344611 - 5$$

$$+\log : (1 + k)^2 = \underline{0{,}3521825}$$

$$\begin{aligned}\log : \text{numérateur} &= 0{,}1884266 - 2 \\ -\log : 0{,}25138 &= \underline{0{,}4003307 - 1} \\ \log : \alpha' &= 0{,}7880959 - 2\end{aligned}$$

$$\text{arc } \alpha' = 0{,}0613898 \text{ pour } r = 1,$$

d'où

$$\text{angle } \alpha' = 3^\circ\, 31'\, 3''.$$

Ainsi, par suite du choc de la cheville de plateau contre la fourchette, cette dernière pourrait parcourir un angle de 3 degrés $^1/_2$, quoiqu'elle soit retenue par la pression de la dent contre le plan de repos de l'ancre.

On voit par là qu'il est important que la forme des cornes de la fourchette soit faite de façon qu'il ne puisse se produire d'accrochement entre la cheville de plateau et la corne par le fait du mouvement rapide de la fourchette. Cette forme devra être celle d'une spirale d'Archimède, ainsi que nous l'avons montré (450).

490. Faisons encore remarquer, à propos des chocs de l'échappement à ancre, celui de la fourchette contre la paroi d'arrêt. Pour une raison analogue à la précédente, la fourchette, parvenant au terme de sa course avec une vitesse que l'on peut évaluer et rencontrant un obstacle fixe, est renvoyée en arrière par l'effet du choc, malgré la résistance de la pression de la roue contre le plan de repos de l'ancre. Si l'ébat de plateau était insuffisant, il pourrait résulter de ce fait un contact instantané du dard et du plateau, et il est par suite nécessaire de donner à cet ébat une valeur suffisante, surtout si les angles de tirage étaient plutôt faibles. Ces contacts, qui ne peuvent être aperçus en examinant le fonctionnement de l'échappement, se manifesteront par une marche irrégulière de la montre, surtout dans les grandes oscillations du balancier.

Du recul de la roue d'échappement.

491. L'angle de recul de la roue d'échappement pendant le dégagement est fonction de l'angle de tirage de l'ancre, de l'angle de repos et du rapport de la distance du repos au centre de l'ancre, avec le rayon de la roue.

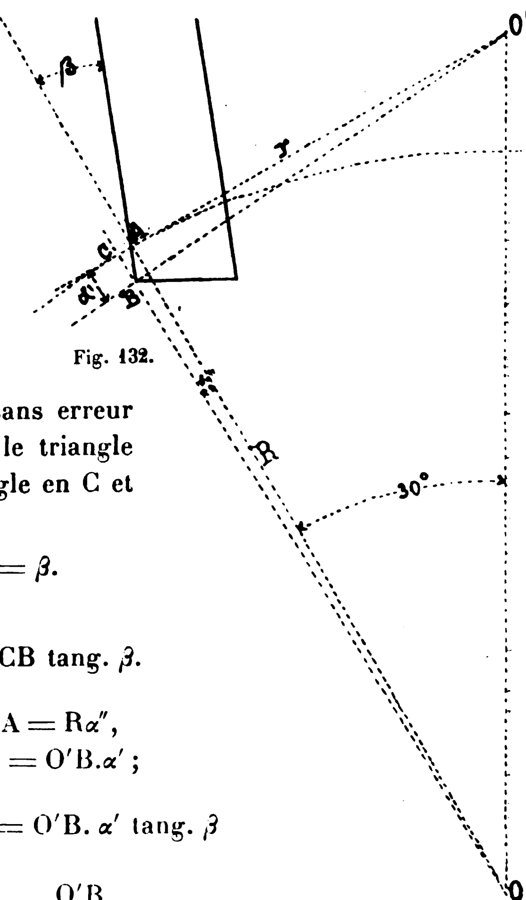


Fig. 132.

Soit β l'angle de tirage de l'ancre, α' l'angle de repos et α'' l'angle de recul de la roue.

Nous pouvons, sans erreur notable, considérer le triangle ABC comme rectangle en C et admettre l'angle

$$CBA = \beta.$$

On aura ainsi

$$CA = CB \text{ tang. } \beta.$$

Mais

$$\text{arc } CA = R\alpha'',$$
$$\text{arc } CB = O'B.\alpha' ;$$

par suite,

$$R\alpha'' = O'B.\, \alpha' \text{ tang. } \beta$$

et

$$(1) \qquad \alpha'' = \alpha' \frac{O'B}{R} \text{ tang. } \beta.$$

Pour calculer la longueur O'B, nous connaissons dans le triangle O'AB, $O'A = r = R. \text{ tang. } 30°$ et les angles α' et $O'AB = 90° + \beta$. Par suite,

$$(2) \qquad O'B = \frac{r. \sin (90° - \beta)}{\sin [90° - (\beta + \alpha')]}.$$

Soit $R = 150$ mm., $\alpha' = 1°30'$, $\beta = 15°$. Le calcul donnera successivement :

$$r = 150.\ \text{tang}.30° = 86,6025.$$

La formule (2) devient

$$O'B = \frac{r.\ \sin 75°}{\sin 73°\ 30'}$$

$$\begin{aligned} \log : r &= 1,9375307 \\ \log : \sin 75° &= \underline{9,9849438} \\ & 11,9224745 \\ -\log : \sin 73°30' &= \underline{9,9817370} \\ \log : O'B &= 1.9407375 \qquad O'B = 87,2444. \end{aligned}$$

Le calcul de la formule (1) donnera ensuite :

$$\begin{aligned} \text{arc } 1° &= 0,0174533 \\ \text{arc } 30' &= \underline{0,0087266} \\ \text{arc } 1°30' &= 0,0261799 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log : \text{arc } \alpha' &= 0,4179681 - 2 \\ \log : O'B &= 1,9407375 \\ \log : \text{tang} : 15° &= \underline{0,4280525 - 1} \\ & 0,7867581 - 1 \\ -\log : R &= \underline{2,1760913} \\ \log : \text{arc } \alpha'' &= 0,6106668 - 3 \end{aligned}$$

$$\text{arc } \alpha'' = 0,00408006$$
$$\text{et } \alpha'' = 0°\ 14'\ 1'',6.$$

492. Sans commettre une grande erreur, la formule (1) peut s'écrire simplement (484) :

$$\alpha'' = \alpha' \frac{r}{R} \text{tang}.\ \beta = \alpha'.\ \text{tang}.\ 30°\ \text{tang}.\ 15° \quad (3).$$

Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned} \log : \text{arc } \alpha' &= 0,4179681 - 2 \\ \log : \text{tang}.30° &= 0,7614394 - 1 \\ \log : \text{tang}.15° &= \underline{0,4280525 - 1} \\ \log : \text{arc } \alpha'' &= 0,6074600 - 3, \qquad \text{arc } \alpha'' = 0,00405005 \end{aligned}$$

La différence entre ces deux résultats n'est donc pas considérable.

493. Parvenue à l'extrémité de la surface d'impulsion du levier de l'ancre, la roue ne termine pas en cet instant son mouvement rétrograde ; elle persiste au contraire dans ce mouvement de recul par suite de la vitesse qu'elle a acquise pendant le parcours de l'angle de repos (426).

Calculons encore la valeur de l'angle qu'elle parcourt dès l'instant où la dent quitte le levier de l'ancre jusqu'à celui où la force motrice du ressort annule ce mouvement en arrière.

494. — L'accélération angulaire I est égale au quotient du moment des forces en action par le moment d'inertie et nous aurons :

$$I = \frac{d\omega}{dt} = \frac{F}{A},$$

F étant le moment de la force motrice par rapport au centre de la roue d'échappement et A le moment d'inertie de cette roue. Nous faisons abstraction ici des résistances secondaires.

D'autre part, on sait que

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{d\alpha}{\omega}.$$

Nous obtiendrons par suite :

$$\omega \, d\omega = \frac{F}{A} \, d\alpha$$

et en intégrant :

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{F}{A} \alpha,$$

d'où il sort

$$(4) \qquad \alpha = \frac{1}{2} \frac{A}{F} \omega^2.$$

Connaissant la vitesse angulaire du balancier à l'instant considéré, c'est-à-dire au moment où la dent quitte l'ancre, on peut déterminer celle de l'ancre par le rapport des angles de levée de ces deux mobiles. Si l'angle de levée du balancier est de 30° et celui de l'ancre 10°, ce rapport sera de

$\frac{1}{3}$. Connaissant la vitesse de l'ancre, on déterminera celle de la roue par la formule (492) :

$$\omega = \omega' \text{ tang. } 15^\circ \text{ tang. } 30^\circ.$$

Nous établirons dans la théorie du réglage le moyen de déterminer la vitesse angulaire du balancier à un instant donné ; aussi, sans vouloir anticiper sur ce sujet, admettrons-nous simplement cette vitesse, pour l'instant que nous considérons, égale à

$$60{,}0311.$$

Celle de l'ancre sera pas suite

$$\omega' = 20{,}0104,$$

et celle de la roue

$$\omega = \omega'.\text{ tang. } 15^\circ.\text{ tang. } 30^\circ = 3{,}0956 \text{ mm.}$$

Soit encore

$$F = 1{,}2 \text{ gr. et } A = \frac{P}{g} R^2 = \frac{0{,}029}{g} 2{,}8^2 \ (482).$$

Le calcul de la formule (4) donnera :

$$\begin{array}{ll} \log : P = 0{,}4623980 - 2 & \\ \log : R^2 = 0{,}8943160 & \log : 2F = 0{,}3802112 \\ \log : \omega^2 = \underline{0{,}9814954} & \log : \ g = \underline{3{,}9916159} \\ \quad 0{,}3382094 & \quad 4{,}3718271 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log : \text{numér :} & = 0{,}3382094 \\ - \log : \text{dénomin :} & = \underline{4{,}3718271} \\ \log : \text{arc } \alpha & = 0{,}9663823 - 5 \end{array}$$

$$\text{arc } \alpha = 0{,}00009255 = \text{arc } 0^\circ\, 0'\, 19''.$$

495. Le mouvement total de recul de la roue d'échappement sera donc pour un angle de tirage de 15° et un angle de repos de 1° 30' :

$$0^\circ\, 14'\, 1'' + 0^\circ\, 0'\, 19'' = 0^\circ\, 14'\, 20'',$$

soit un quart de degré environ ; cette valeur a été calculée pour l'ancre à repos équidistants, mais ne différera pas beaucoup pour les autres constructions.

Position de rencontre de la dent avec le plan d'impulsion du levier de l'ancre.

496. Recherchons maintenant la valeur de l'angle parcouru par la roue d'échappement à partir de sa position d'arrêt après le recul jusqu'à ce qu'elle atteigne la surfaee d'impulsion de l'un des leviers de l'ancre.

Nous pouvons admettre, pour simplifier le calcul, que la vitesse du balancier demeure constante pendant que la cheville de plateau se trouve dans l'entrée de la fourchette. Le balancier sera animé, pendant ce temps, de sa plus grande vitesse, que nous représenterons par la formule

$$\omega = \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}},$$ [1]

ω étant la vitesse angulaire du balancier;

α_0 l'angle d'écartement du balancier de sa position de repos au commencement de l'oscillation ;

M le moment de la force du spiral;

A le moment d'inertie du balancier.

La formule qui donne la valeur de la durée totale d'une oscillation du balancier, est

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}},$$ [1]

de laquelle nous pouvons tirer :

$$\sqrt{\frac{M}{A}} = \frac{\pi}{T};$$

par suite on obtiendra :

$$\omega = \alpha_0 \frac{\pi}{T}.$$

Pour une montre dont le balancier parcourt un arc d'oscillation d'un tour et demi, nous avons

$$\alpha_0 = \frac{1,5}{2} \text{ tours} = 1,5\,\pi = 4,7124.$$

[1] Ces formules seront établies dans la théorie du réglage (volume II).

T est la durée d'une oscillation qui est, pour une montre dont le balancier en exécute 18000 par heure :

$$T = 0^s, 2.$$

Nous aurons ainsi la vitesse angulaire du balancier par

$$\omega = 4{,}7124 \frac{3{,}1416}{0{,}2} = 74{,}022.$$

Rappelons que cette valeur représente la longueur que parcourrait en une seconde un point du balancier situé à l'unité de distance de l'axe, si la vitesse était uniforme pendant cette durée.

Connaissant la vitesse, on peut déterminer le temps t employé à parcourir un certain espace e par le quotient (31) :

$$t = \frac{e}{v},$$

équation qui devient, en remplaçant les valeurs linéaires qu'elle contient par les valeurs angulaires considérées :

$$(1) \qquad t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{74{,}022}.$$

Nous aurons ainsi le temps employé par le balancier à parcourir un certain angle α, fonction du temps t.

Déterminons cette même valeur pour la roue, c'est-à-dire recherchons le temps t'' qu'elle emploie à parcourir l'angle α'', à partir duquel sa vitesse était égale à zéro, jusqu'au point de rencontre de la dent avec le levier de l'ancre.

La roue est sollicitée par une force provenant du ressort du barillet et que nous considérons comme constante pendant une oscillation du balancier. Son moment M'' par rapport à l'axe de la roue d'échappement sera égal, supposerons-nous, à 1 gr.

Un corps sollicité par une force constante prend un mouvement uniformément accéléré pour lequel on a la vitesse

$$v = jt = \frac{F}{m} t$$

et l'espace parcouru

$$e = \frac{1}{2} jt^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

F = force en action et m = masse du corps. De cette dernière équation nous tirons :

$$t = \sqrt{2 e \frac{m}{F}};$$

en remplaçant ces valeurs linéaires par celles qui se rapportent au mouvement de rotation, on écrira :

$$t'' = \sqrt{2 \alpha'' \frac{A''}{M''}}. \tag{2}$$

A'' = moment d'inertie de la roue d'échappement.

Egalant maintenant les valeurs de t et t'', puisque les angles α et α'' sont parcourus en des temps égaux, on obtiendra :

$$\frac{\alpha}{\omega} = \sqrt{2\alpha'' \frac{A''}{M''}}$$

et

$$\alpha^2 = 2 \omega^2 \alpha'' A'',$$

M'' étant égal à 1.

Lorsque le balancier parcourt un angle de 30°, une roue de 15 dents parcourt 12° moins la chute. Admettons 2 degrés de chute, nous aurons :

$$\frac{\alpha}{\alpha''} = \frac{30°}{10°}$$

et

$$\alpha = 3 \alpha'',$$

d'où

$$\alpha'' = \frac{2}{9} \omega^2 A''.$$

497. — **Calcul numérique.** — Soit ω = 74,022 mm.

$$A'' = \frac{P}{g} R''^2$$

P'' = 0,029 gr. et R'' = 2,8 mm.

Le calcul donnera succcssivement :

$$\begin{array}{ll} \log : P'' = 0{,}46240 - 2 & \log : \ 2 \ = 0{,}30103 \\ \log : R''^2 = 0{,}89432 & \log : \omega^2 = 3{,}73872 \\ \quad\quad\quad\quad \overline{0{,}35672 - 1} & \log : A'' = 0{,}36510 - 5 \\ -\log : \ g \ = 3{,}99162 & \quad\quad\quad\quad \overline{0{,}40485 - 1} \\ \log : A'' = \overline{0{,}36510 - 5} & -\log : \ 9 \ = 0{,}95424 \\ & \log : \alpha'' = \overline{0{,}45061 - 2,} \end{array}$$

d'où

$$\alpha'' = 0{,}0282233 = 1^\circ 37' \, 1''.$$

En retranchant de cette valeur celle que nous avons trouvée pour le recul de la roue (495), on peut constater que la rencontre de la dent avec le levier de l'ancre aura lieu à une distance de 1° 22′ 44″ du point de repos.

De l'arrêt au doigt.

498. — Si l'on remonte le ressort moteur d'une montre qui se trouvait arrêtée à la position de repos de l'arrêtage et que, malgré l'action de cette force, le balancier ne se mette en mouvement qu'à l'aide d'une impulsion extérieure, le défaut produisant cet effet se nomme l'**arrêt au doigt.** Il peut se manifester également dans une montre en marche, lorsque l'on cherche à immobiliser le balancier au moyen du doigt ou d'une cheville de bois.

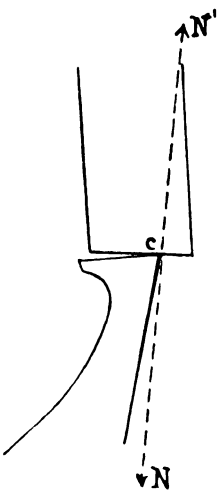


Fig. 133.

En examinant les conditions dans lesquelles cet arrêt se produit, on reconnaît qu'une dent de la roue d'échappement se trouve arrêtée contre le plan d'impulsion de l'un des leviers de l'ancre (fig. 133). Il doit donc exister en cet instant un équilibre entre la force animant l'ancre et celle du spiral; et l'équilibre ne se produira qu'après le passage de la position de repos du balancier, pendant la demi-oscillation ascendante, lorsque la force du spiral devient force résistante.

En admettant la force que reçoit l'ancre comme constante, il se trouvera pendant le mouvement un instant où elle deviendra égale à la résistance provenant du spiral, puisque cette dernière, passant par un minimum égal à zéro au point de repos du balancier, croît ensuite proportionnellement à l'angle d'écartement entre ce point et la ligne des centres. Il faut donc, pour que l'arrêt considéré n'ait pas lieu, que cette égalité des forces en action ait lieu en dehors de l'angle de levée du balancier. Par suite, l'arrêt au doigt s'établira lorsque cet angle dépassera une limite que nous allons établir.

499. Désignons par F le moment de la force provenant du ressort de barillet et par rapport à l'axe de l'ancre. Ainsi que nous l'avons dit plus haut, cette force sera considérée comme constante pendant une oscillation du balancier. Le moment de la force du spiral, étant proportionnel à l'angle dont le balancier est écarté de sa position de repos, pourra être représenté par $M\alpha$ (M moment de cette force pour un angle d'écartement égal à l'unité).

Au point c de contact (fig. 134) s'établissent des forces normales N et N′, qui ont respectivement pour valeur :

$$N = \frac{F}{Ob}$$

et

$$N' = \frac{M\alpha}{O'b'},$$

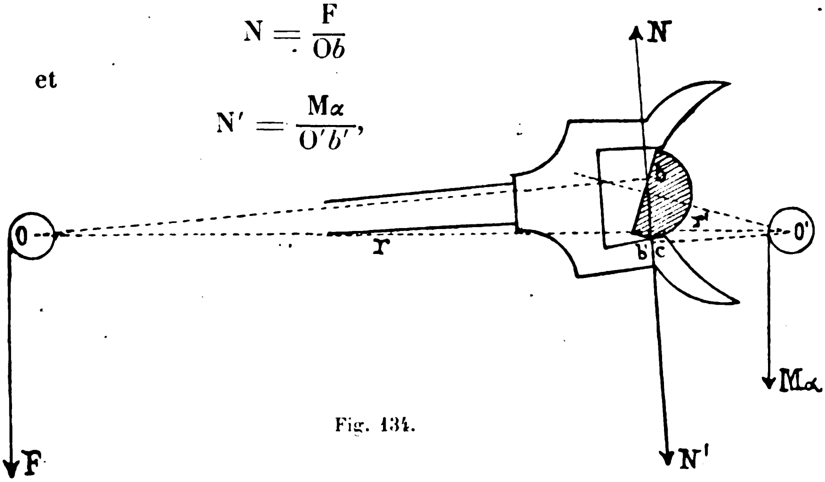


Fig. 134.

Ob et $O'b'$ étant les bras de leviers des pressions normales. Ayant donc $N = N'$ pour une certaine valeur de α que nous représenterons par α', on pourra écrire

$$\frac{F}{Ob} = \frac{M\alpha'}{O'b'}$$

ou

$$\frac{F}{M\alpha'} = \frac{Ob}{O'b'} = \frac{r}{r'},$$

r et r' étant les rayons des circonférences primitives du système à l'instant considéré. On aura par suite

$$\alpha' = \frac{F}{M} \cdot \frac{r'}{r}.$$

500. **Calculs numériques.** — Pour un premier calcul, admettons 10° pour l'angle de levée de l'ancre et 30° pour celui du balancier. Les angles parcourus étant inversement proportionnels aux rayons, on aura

$$\alpha' = \frac{F}{M} \cdot \frac{10}{30}.$$

Soit aussi

$$\frac{F}{M} = 1;$$

on obtiendra par suite

$$\alpha' = \frac{1}{3} = 0,333...$$

Pour calculer l'angle correspondant à cette valeur, on considère la circonférence de rayon égal à l'unité :

$$2\pi = 6,2832 = 360°;$$

l'angle cherché sera donc égal à

$$\frac{360 \times 0,333}{6.2832} = 19°...$$

L'équilibre s'établirait par conséquent à la distance angulaire de 19° de la ligne des centres ; en cet instant, la cheville de plateau étant hors de contact avec la fourchette, il n'y aura pas d'arrêt au doigt.

Prenant maintenant les angles de levée de 10 et 40 degrés, nous aurons :

$$\alpha' = \frac{1}{4} = 0,25,$$

répondant à un angle de 14° environ. Comme dans ce cas la cheville de plateau reste en contact avec la fourchette pendant 20 degrés après la ligne des centres, nous aurons donc de l'arrêt au doigt.

Pour un angle de levée du balancier de 35°, on aura de l'arrêt au doigt à 16° et la limite se trouvera vers un angle de levée très peu inférieur à 34°.

Ce que nous avons dit (461) de la transmission de la force de la roue à l'ancre a fait voir que le moment de force résistante par rapport au centre de l'ancre augmente du commencement à la fin de l'impulsion sur le levier de sortie et que le contraire a lieu au levier d'entrée. Cela explique pourquoi l'on constate plus facilement l'arrêt au doigt sur le levier de sortie que sur celui d'entrée.

501. Faisons remarquer aussi que l'exagération de l'angle de levée du balancier n'est pas l'unique cause qui puisse produire de l'arrêt au doigt, mais que celui-ci peut provenir également d'un ou plusieurs des motifs ci-dessous, dérivant principalement de défauts de construction.

1° Force motrice trop faible, défaut qui peut provenir d'engrenages ou d'un échappement défectueux, ou encore d'un ressort moteur trop faible.

2° Les surfaces frottantes des leviers de l'ancre ou des dents de la roue mal polies.

3° Mauvaise inclinaison des surfaces d'impulsion.

4° Entrée de fourchette trop serrée ou mal polie.

5° L'ensemble des organes de l'échappement trop lourd.

6° Défauts imputables à l'huile, c'est-à-dire à sa trop grande quantité, à son épaississement ou encore à son absence.

Arrêt sur le repos.

502. Cet arrêt peut se produire au moment du dégagement, lorsqu'une dent de la roue d'échappement, appuyée contre le plan de repos de l'ancre, maintient la fourchette contre la paroi avec une force supérieure à celle qui provient du spiral.

L'équilibre aura donc lieu avant le passage du point de repos du balancier sur la ligne des centres et pendant la demi-oscillation descendante, tandis que nous avons vu que l'arrêt au doigt avait lieu pendant la demi-oscillation ascendante.

L'arrêt sur le repos se produira lorsque l'angle de levée du balancier est trop faible et par suite le spiral trop peu écarté de sa position de repos pour avoir une tension suffisant à dégager l'ancre.

Le rapport des angles de levée de l'ancre et du balancier étant de $\frac{10}{30}$, il en résulte que, pour faire parcourir 2° de repos à l'ancre, le balancier en devra parcourir 6. Ce dernier ne commencera à recevoir l'impulsion qu'à partir d'un angle de $15 - 6 = 9°$ avant la ligne des centres. Il faudra donc, pour que l'arrêt sur le repos n'ait pas lieu, que l'égalité des forces s'établisse entre 9 et 0°, c'est-à-dire en un point où les deux mobiles ne puissent se maintenir en équilibre, le dégagement étant effectué.

Prenons un exemple numérique. Le moment de la force capable de dégager l'ancre du repos a été donné par l'équation (476) :

$$F = P \text{ tang. } 30° \frac{\text{tang. } \beta + f}{1 - f. \text{ tang. } \beta},$$

dans laquelle P représente le moment de la force agissant sur la roue, soit 1 gr., β l'angle de tirage, que nous admettrons de 15°, et f le coefficient de frottement de 0,15. Le calcul donne

$$F = 0{,}25 \text{ gr.}$$

Les conditions d'équilibre étant les mêmes que dans le cas de l'arrêt au doigt, nous aurons également

$$\alpha' = \frac{F}{M} \frac{r'}{r}.$$

Faisant $M = 1$ gr., on aura

$$\frac{F}{M} = 0{,}25 \text{ gr.},$$

et, comme nous prenons

$$\frac{r'}{r} = 0{,}33,$$

on aura

$$\alpha' = 0{,}33 \times 0{,}25 = 0{,}0825,$$

répondant à un angle de 4° $^3/_4$. Il n'y aura donc pas d'arrêt sur le repos dans ce cas.

Si l'angle de levée du balancier avait été de 20°, nous anrions eu

$$\alpha' = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125,$$

répondant à un angle de 7° environ. Ici l'impulsion commence à 10 — 4 = 6° avant la ligne des centres et, comme 7° se trouvent pendant le parcours du dégagement, nous aurions dans ce cas de l'arrêt sur le repos. On peut donc constater que l'angle de 30° est un angle de levée très favorable pour le balancier, ne donnant ni arrêt au doigt ni arrêt sur le repos.

503. Le rapport $\frac{F}{M}$, que nous avons admis égal à l'unité pour le calcul de l'arrêt au doigt (499), n'atteint cette valeur que dans certaines montres de 43 mm. (19 lignes), construites avec tous les soins possibles. Dans les montres de fabrication courante, F a une valeur plus grande que M par suite des imperfections inévitables de la construction ; elles possèdent, en effet, une force motrice relativement grande et un spiral faible. La valeur $\frac{F}{M}$ augmentera donc et l'on aura plus facilement l'arrêt sur le repos et moins facilement l'arrêt au doigt.

Dans les montres de construction ordinaire où la question du bas prix de vente joue un rôle important et dans les échappements desquelles les angles de chute et de repos sont relativement élevés, les balanciers ont un moment d'inertie plutôt faible et par suite le moment de la force du spiral se trouve également diminué. En tenant compte de ces raisons, il ne serait pas prudent de choisir, pour le

balancier, un angle de levée aussi réduit que 30° ; dans ce cas, l'angle de repos trop fort serait plus nuisible à la marche qu'un faible arrêt au doigt.

Nous tirerons de ce raisonnement la conclusion que, dans une montre, toute combinaison de mécanisme doit être en harmonie avec le but même de sa construction et que les données applicables diffèrent, dans une certaine mesure, selon qu'il s'agit d'un mouvement ordinaire ou d'un mouvement de prix.

TABLE DES MATIÈRES DU PREMIER VOLUME

INTRODUCTION

I. Éléments généraux de cosmographie ayant rapport à l'horlogerie.

II. Principes généraux de mécanique.

CHAPITRE PREMIER

Fonctions générales des pendules et des montres.

CHAPITRE II

Forces d'entretien ou forces motrices.

CHAPITRE III

Du rouage.

CHAPITRE IV

Des engrenages.

CHAPITRE V

Des échappements.

CHAPITRE VI

Echappement à ancre.